HS Johannes Kepler
Prof. E. Knobloch
SS 2000, TU Berlin

Nova Stereometria Doliorum Vinariorum

Zur Fassrechnung Johannes Keplers

10. November 2000

Daniel Burckhardt
180979
daniel.burckhardt@alumni.ethz.ch

1 Einführung

Wenn ich in diesen Betrachtungen über den Einfluss der unmittelbaren Sinnesanschauung Kepler vorzugsweise genannt habe, so war es, um daran zu erinnern, wie sich in diesem grossen, herrlich begabten und wunderbaren Manne jener Hang zu phantasiereichen Kombinationen mit einem ausgezeichneten Beobachtungstalent und einer ernsten, strengen Induktionsmethode, mit einer mutigen, fast beispiellosen Beharrlichkeit im Rechnen, mit einem mathematischen Tiefsinn vereinigt fand, der, in der 'Stereometria doliorum' offenbart, auf Fermat und durch diesen auf die Erfindung des Unendlichen einen glücklichen Einfluss ausgeübt hat.
Alexander von Humboldt. Kosmos: Teilband 2

Zwei Jahre nach dem Tod seiner ersten Ehefrau Barbara, heiratete Johannes Kepler (1571-1630) am 30. Oktober 1613 (a. S.) Susanne Reuttinger, die Waisentochter eines ländlichen Handwerkers. In einem Einladungsschreiben zur Hochzeitsfeier, das Kepler vermutlich an Baron Peter Heinrich von Strahlendorf in Prag richtete [KGW Bd. XVII, Brief 669 (Kepler 1971, S. 47-56)][1], erfahren wir, wie der damals Zweiundvierzigjährige nicht weniger als elf Witwen und Mädchen auf der Suche nach einer neuen Gattin in Erwägung gezogen hatte. Nach dem Fest im "Goldenen Löwen" von Eferding sollte auf den Winter hin auch der Weinkeller im Linzer Heim aufgestockt werden.

> "Es war im vergangenen November [1613]. Ich hatte eben eine neue Gattin heimgeführt, Österreich schickte nach einem ebenso reichen wie guten Weinherbst eine Menge Lastschiffe die Donau herauf, um seinen Reichtum mit unserem Noricum zu teilen, und das ganze Linzer Ufer bot ein Bild, als wäre es zugebaut mit Weinfässern, die für einen annehmbaren Preis zu kaufen waren. Da fühlte ich mich als Gatte und guter Familienvater verpflichtet, für mein Haus nach dem nötigen Getränk Ausschau zu halten. Ich liess mir daher etliche Fässer ins Haus bringen und einkellern." [KGW Bd. IX, S. 9 (Hammer 1955, S. 432)]

Eine Situation aus dem Alltag, wie sie vor und nach Kepler unzählige Male abgelaufen ist. Doch Keplers kindlich neugieriger wie erwachsen kritischer Geist wundert sich über eine Methode, die auf einfachste Weise einen überaus komplexen Sachverhalt - den Inhalt eines Fasses abhängig von seiner äusseren Form - zu erfassen scheint:

> "Vier Tage danach kam der Verkäufer mit einer Messrute, einer einzigen nur, mit der er von allen Fässern samt und sonders der Reihe nach, ohne Unterschied, ohne Rücksicht auf die geometrische Gestalt, ohne weitere Überlegung oder Rechnung den Inhalt ermittelte. Er schob einfach die metallene Spitze der Rute durch das Spundloch des Fasses schräg hinein bis zur tiefsten Stelle des einen und dann des anderen kreisförmigen Holzdeckels, die in der Umgangssprache Böden heissen. Erwies sich die Länge vom höchsten Punkt des Bauches bis zum tiefsten der kreisrunden Bretter beiderseits als gleich, so gab er nach der Zahlenmarke, die der Rute am Ende der gemessenen Länge aufgeprägt war, die Zahl der Eimer an, die das Fass halten sollte. Nach dieser Zahl wurde die Höhe des Preises errechnet." [ebda, S. 9]

Als Mathematiker des Kaisers und der oberösterreichischen Stände fühlte sich Kepler verpflichtet, die Gültigkeit des Messverfahrens nachzuprüfen. Dazu verglich er aber nicht etwa

[1] KGW: Johannes Kepler. *Gesammelte Werke.* Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften unter der Leitung von Walther von Dyck, Max Caspar und Franz Hammer. München 1937ff. Den Verweis auf eine Übersetzung von im Original lateinischen Textstellen füge ich jeweils in runden Klammern hinzu.

bei einer Reihe unterschiedlich geformter Fässer die Ablesung der Rute mit der Zahl der zur Füllung benötigten Eimer. Vielmehr schickte er sich an, mit den erhabenen Sätzen der antiken Geometer die Mess- und Rechenprinzipien der Praktiker zu verifizieren.

Keplers Verleger ahnte, dass solche Überlegungen eher die Gelehrtenwelt als die Visierer und Küfer interessieren würde; nirgends wird berichtet, dass die ins Deutsche übertragene und von allen Beweisen befreite Fassung der *Nova Stereometria* grosse Käuferschaft fand. Stärkere Beachtung fand die Schrift unter den zeitgenössischen Geometern. Auch wenn am konkreten Vorgehen Keplers teilweise heftige Kritik formuliert wurde, setzte sich die Einsicht durch, dass die Flächen- und Volumenrechnung eine Vielzahl offener Probleme bot, die nur durch Einsatz von neu zu entwickelnden Methoden jenseits von Euklid, Archimedes und Pappus gelöst werden können.

Deshalb werde ich mich in dieser Arbeit nach einer kurzen Darstellung der Visierkunst und der Entstehungsgeschichte der *Nova Stereometria* und der *Messekunst Archimedis* auf die mathematischen Neuerungen Keplers und deren Rezeption konzentrieren. Im Kapitel über die archimedische Stereometrie vergleiche ich anhand der Transformation des Kreises in ein flächengleiches Dreieck den antiken Ausschöpfungsbeweis mit Keplers Zerlegung in eine unendliche Zahl von Dreiecken. Bei der exakten Bestimmung des Volumen des Apfels sehen wir, wie Kepler erfolgreich neue Fragestellungen bearbeitet. Im letzen Kapitel über die Stereometrie des österreichischen Fasses kehrt Kepler zum Problem der Visierung zurück und beobachtet dabei die besonderen Eigenschaften bei der Volumenänderung in der Nähe von Extremalstellen.

2 Die Visierkunst[2]

Die Visierkunst, im Lateinischen als *Ars visorandi* oder *Stereometria doliorum* bezeichnet, beschäftigt sich mit der Ermittlung des Volumens von Hohlkörpern. Durch die Ausweitung des Handels zwischen den aufblühenden Städten und Märkten im 14. und 15. Jahrhundert wird die Ausmessung von Fässern zu einer für den Alltag bedeutsamen Fragestellung der praktischen Mathematik. Wo Wein, Bier, Öl, Honig, aber auch Fisch, transportiert und zum Verkauf angeboten wurden, mussten Käufer, Verkäufer und Zoll den Inhalt der Gefässe einfach und zuverlässig bestimmen können [Folkerts 1974, S. 5]. Diese Aufgabe wurde in vielen Städten an Visierer übertragen. In Nürnberg gab es jeweils zwei, die aus dem Kreis der Küfer gewählt und dann vereidigt wurden. An Markttagen wurden sie bei Handänderungen beigezogen, an den anderen Tagen halfen sie beim Abfüllen der Fässer, die nur von ihnen ausgemessen und versiegelt in den Handel gebracht werden durften [Folkerts 1974, S. 7].

Das Wissen um die Visiermethoden wurde nicht nur mündlich tradiert. Der älteste Verweis auf ein Visiertraktat stammt aus der Mitte des 14. Jahrhunderts [Folkerts 1974, S. 13]. Aus der Zeit von 1450 bis 1650 sind über 60 handschriftliche und gedruckte Darstellungen erhalten. Sie wurden von Praktikern für Praktiker geschrieben. Die älteren, anonym gebliebenen, Autoren waren wohl meist Mönche. Ab 1500 sind es die Kaufmannsmathematik lehrenden

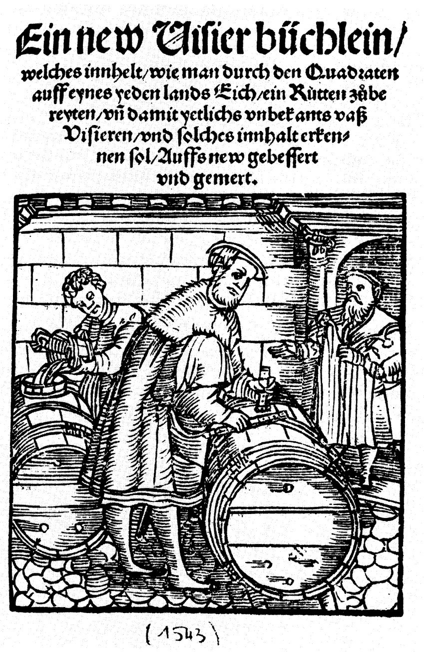
[2] Vergleiche [Folkerts, 1974].

Rechenmeister, die in ihren Büchern den Gebrauch und die Herstellung von Visierruten “klar und für alle verständlich” erläutern [Folkerts 1974, S. 17f].

2.1 Visierruten

Aus den Abbildungen und Beschreibungen in Visierbüchern erfahren wir Einzelheiten über den Ablauf des Messvorgangs, wobei aufgrund der Skala zwei Grundtypen, die quadratische und die kubische Rute, unterschieden werden.

FIGUR 2-1 Titelseite des *Neuen Visierbüchleins* von Johann Frey [Mass, Zahl und Gewicht 1989, S. 134]



2.1.1 Die quadratische Rute

Auf der Titelseite der 1543 erschienenen 2. Auflage des *Neuen Visierbüchleins* von Johann Frey finden wir den Einsatz der sogenannten quadratischen Visierrute dargestellt, die vor allem in Süddeutschland Verwendung fand. Bei dieser Messmethode wird das Fass näherungsweise als ein Zylinder aufgefasst. Deshalb ist sein Inhalt proportional zum Quadrat der Tiefe t und der Länge l.

Werden $t = a\, t_o$ und $l = b\, l_o$ als Mehrfache einer Normtiefe und -länge geschrieben, dann ist das Volumen (in Bezug auf ein festgelegtes Normmass v_o) durch $a^2\, b$ gegeben. Die Vielfachen a^2 und b können auf einer quadratischen respektive linearen Skala direkt abgelesen werden und müssen danach miteinander multipliziert werden.[3] Die Wölbung des Fasses, die unterschiedliche Tiefe der Böden und des Spundlochdurchmessers, wurde durch arithmetische Mittelung der Werte, die “corrigiert tieffe”, berücksichtigt. Diese Mittelung erfolgte wiederum nicht durch Augenmass oder Rechnung, sondern mit dem zu diesem Zweck entworfenen Medial, einem vierkantigen Stab mit zum Mittelpunkt symmetrischen Skalen [Folkerts 1974, S. 27f].

2.1.2 Kubische Rute

Mit nur einer Messung und ohne jegliche Rechnung kam die wohl hauptsächlich in Österreich verwendete Rute mit einer kubischen Skala aus, deren Einsatz Kepler folgendermassen schildert.

> "Nachmalen wann ein Kauff geschicht und die Fässer in die Keller eingeschossen unnd geöffnet worden / dann kompt der Weinvisierer oder der verkauffer mit einer gerechten / unnd bey der Statt approbirten Visierruthen / die senckt er oben zum Spontloch oberzwer gegen dem einen Boden hinunter: unnd stüret so lang / biß er deß winckels / oder understen theils vom Boden gewar wirdt: dann so merckt er / mit welcher ziffer die Ruthe oben an das Beihel raiche; versucht es auch gegen dem andern Boden / ob etwa die eine zwer lini lenger wer / als die ander. Welche ziffer nun an der Visierruthen zu baiden malen gezeiget wirdt / oder das mittel zwischen baiden (wann die zwerlinien ungleich weren) die gibt ihme die anzahl deren Emmer / so im Faß seind: und nach derselben ziffer wirt die Kauffsumma / deren man nach dem Emmer eins worden / zusamen gerechnet.
> Diß ist nun eine gar behende weise zu Visieren / weil sie gar keiner Rechnung bedarff." [KGW Bd. IX, S. 142]

Die Ermittlung des Volumens über die Diagonale funktioniert aber nur bei einem fixen Verhältnis zwischen Tiefe und Länge des Fasses. Deshalb musste für jeden Fasstyp eine eigene Rute konstruiert werden.

3 Niederschrift und Druck der *Nova Stereometria* und der *Messekunst Archimedis*

Kein Buch konnte Keplers Interesse an der Rechtfertigung der Fassvisierung befriedigen, da die rezeptartigen Anweisungen der Rechenmeister nirgends aus einer allgemeinen Theorie abgeleitet wurden. Deshalb macht er sich nach dem Einkauf unverzüglich selbst an die Arbeit. Schon wenige Wochen später, am 17. Dezember 1613, glaubt er am Ziel zu sein: an diesem Tag schreibt er die Widmung an Fürst Maximilian von Liechtenstein und Freiherr Helmhard Jörger, denen er ein knapp sechsseitiges Werk als Neujahrsgabe zueignet [Hammer 1955, S. 433].

Kepler will sein Werk drucken lassen, doch der Augsburger Buchhändler Krüger meint, dass eine derartige, auf Lateinisch abgefasste Schrift nur schwer zu verkaufen wäre.

> "Eure Fassrechnung habe ich dieser Tage richtig erhalten und wegen der Herausgabe sofort mit unserem Buchhändler Krüger verhandelt. Auf keine Weise gelang es mir jedoch, ihn dazu zu bringen, den Verlag auf seine Kosten zu übernehmen. Obschon er zugeben musste, dass der Name Kepler bei allen wissenschaftlich Gebildeten in Gunst und hohem Ansehen stehe, so behauptete er doch, der Gegenstand des Buches finde keinen Anklang und scheine ihm nicht verkäuflich, zumal in lateinischer Sprache." [Welser an Kepler vom 11.Februar 1615, KGW Bd. XVII, Brief 680 (Hammer 1955, S. 433)]

---

[3] Durch eine sogenannte "Wechselrute", bei der abhängig von der Fasstiefe verschiedene Längenskalen zum Einsatz kommen, konnte auch diese Multiplikation auf eine Skalenablesung reduziert werden. Deshalb schrieb Ulrich Kern in seinem Visierbuch von 1531: "Und so dise ruoten bereyt werden ... alß dann mag sie eyn yeglicher lernen, er könn rechnen oder nit, er könn lesen, schreiben oder nit, alleyn das er die ziffer biß uffs 100 an der zal kenne, damit er alle vaß visieren kan on eyniche grosse rechnung. Dann jr rechnung schon an allen orten und enden der ruoten angezeychnet ist, dann sie voller ziffer werden." [zitiert nach Folkerts 1974, S. 26]

Kepler entschloss sich darauf, selbst für die Kosten der Drucklegung aufzukommen. Doch nach dem Tode Welsers, der die Verhandlungen in Augsburg führte, blieb das Manuskript 16 Monate bei Krüger liegen und wäre wohl kaum noch gedruckt worden, wenn nicht im Frühjahr 1615 Hans Blanck ins vorher druckerlose Linz gekommen wäre und Kepler seine Dienste anbot [Hammer 1955, S. 433].

Nun ist es aber Kepler selbst, der mit dem aus Ausburg zurückgeschickten Manuskript nicht mehr zufrieden ist. Es erscheint ihm kümmerlich, er entdeckt einen verhängnisvollen Fehler und kommt zum Schluss, "obgleich in grosser Arbeitsnot" das Werk grundsätzlich zu überarbeiten und zu erweitern. Dem ersten Entwurf fügt er eine Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes hinzu, ebenso den ganzen 2. Teil mit den Maximumsbetrachtungen in konjugierten und assoziierten Kegelstumpfscharen [Hammer 1955, S. 433]. Deshalb kann er den Verzögerungen beim Druck sogar noch gute Seiten abgewinnen:

> "Auch ich habe dies [dass für den Kegelstumpf dieselbe Eigenschaft wie für den maximalen Zylinder gilt] während der anderthalb Jahre geglaubt und mein Augenmerk darauf gerichtet, und ich war schon geneigt, auf diesen Grundsatz gestützt, die Fässer der Rheinländer gemeinsam mit allen andern ohne Rücksicht auf ihre Ausbauchung bezüglich ihres Fassungsvermögens den österreichischen Fässern nachzustellen; [...]. So habe ich es der Lässigkeit des jetzigen Druckers zu verdanken, dass die Geometrie hier den Herausgeber am Ohr zupfte und mir gewissermassen zur Vermehrung des Anhangs zu Archimedes folgende Lehrsätze darbot; [...]." [KGW Bd. IX, S. 86, (Kepler 1908, S. 62)]

Nach nur 6 Wochen beendet er am 15. Juli die Umarbeitung des Werks, das ausser der Widmung kaum noch eine Gemeinsamkeit mit dem ersten Entwurf aufweist. Bereits auf der Frankfurter Herbstmesse von 1615 ist das sorgfältig gedruckte Werk zu kaufen.

Obwohl Keplers Brotgeber, die Stände von Oberösterreich, diesen lieber an den Rudolphinischen Tafeln und Landkarten arbeiten sähen[4], macht dieser sich nach der Vollendung der *Nova Stereometria* sofort an die Umarbeitung des Werkes für Praktiker, die weder Latein verstanden noch an tieferliegenden mathematischen Überlegungen Interesse hatten, wohl aber beruflich an den Ergebnissen des Messwesens. Nach fünf Monaten, zu Weihnachten 1615, wird die *Messekunst Archimedis* fertiggestellt und auf der Frühjahrsmesse von 1616 in Frankfurt zum Verkauf angeboten [Hammer 1955, S. 434].

4 "E. En. wissen zweivels ohn noch wol zuerinneren, wasmaßen denselben Ich bey neülicher der Löbl: Stände Zusammenkunfft etliche *Exemplaria* meines *Tractats*, so Ich im verschinen Jahr von der Öst: Landeich und Maassen in Druckh verfertiget, gehorsamlich *praesentiert*, deren underthänigen Hoffnung, es wurden die Löbl: Stände ob solcher meiner arbaitt, so Ich dem Land zum besten mit grosser mühe und aignem Uncosten biß in 250 fl. erzeügt, ein gnädiges wolgefallen haben: und wurden also die drey viertl Jahr, so Ich darmit zugebracht, wol angelegt sein: [..].
Es ist mir aber drauff mundtlich zur antwort und beschaid worden, das die Löbl: Stände vil lieber sehen, das Ich dergleichen arbaitt einstellen, und die wüchtigere sachen, darauff Ich fürnemlich bestellet seye, als die *Tabulas Rudolphinas* und die Land*mappam* zu völligem werckh richten solte Nu hatt dise arbaitt mit der Messekunst alberaitt zun Weihennächten Ire endschafft erraicht, ist auch sonderlich under anderm dahin angesehen gewest, das Ich dem druckher mit einer *materia populari* auffhelffe, und Ine hernach zu anderen meinen werckhen zur hand haben möge." [Kepler an die Stände von Oberösterreich vom 9. Mai 1616, KGW Bd. XVII, Brief 734]

4 Die archimedische Stereometrie

4.1 Beweise durch Ausschöpfung

Eudoxos von Knidos (ca. 390-340 v. Chr.) und Archimedes (287 - 212 v. Chr.) bewiesen mittels indirekter Beweise Aussagen über die Verhältnisse zwischen Flächen und Volumina gewisser ebener und räumlicher Figuren, wobei Archimedes die Stereometrie um die Berechnung von Rotationskörpern 2. Grades - Kugel, Sphäroid, Konoid - erweiterte [Hammer 1955, S. 431]. Diese werden von Kepler im ersten Abschnitt der *Nova Stereometria* ziemlich vollständig wiedergegeben, wobei er für die später Ausschöpfung (*exhaustio*)[5] genannten Beweise auf die Werke von Archimedes verweist.

Am Satz über den Kreisinhalt, formuliert als Verhältnis der Fläche des Kreises zu der des über dem Kreisumfang errichteten rechtwinkligen Dreiecks, lässt sich der unterschiedliche Umgang mit dem Unendlichen bei Archimedes und Kepler exemplarisch ablesen.

4.1.1 Der archimedische Beweis

Der erste Satz von Archimedes' kurzer Schrift über die Kreismessung lautet:

> "Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschliessenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist."
> [Archimedes 1967, S. 369]

Der Beweis für die Gleichheit beruht auf der Rückfuhrung der beiden alternativen Aussagen - die Fläche des Kreises ist grösser oder kleiner als die des Dreiecks - auf einen Widerspruch. Durch die stückweise Approximation des Kreises mit Polygonen wird der Umgang mit unendlichen Prozessen oder aktual-unendlich kleinen Grössen vermieden.[6]

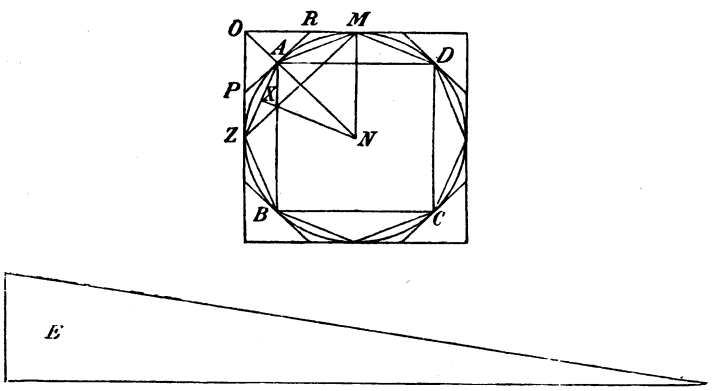
Zuerst betrachtet Archimedes die Möglichkeit, dass die Fläche des Kreises C grösser als die des angegebenen Dreiecks E sei. In diesem Falle werden ausgehend von einem Quadrat durch wiederholte Halbierung der Seiten $2^n \cdot 4$ -Ecke p_n in den Kreis einbeschrieben. Aus Euklid XII., 2 ist bekannt, dass sich die Differenz der Flächen des Kreis und der einbeschriebenen Polygone p_n mit jeder Unterteilung mehr als halbiert, das heisst $C\text{-}p_n < 1/2\ (C - p_{n-1})$

[5] Die Namensgebung ist nicht besonders glücklich, da sie von Grégoire de St. Vincent (1584-1667) im Rahmen seiner eigenen, auf Indivisiblen beruhenden, Beweise eingeführt wurde [Boyer 1949, S. 136]. Die antiken Beweise unterschieden sich gerade in dem Punkt fundamental von den neuen Lösungsansätzen im 17. Jahrhundert, dass sie die Flächen und Volumnia *nicht* vollständig ausschöpften, sondern bloss bis auf eine beliebig kleine aber fest vorgegebene Differenz approximierten.

[6] [Baron 1969, S. 22-25] bespricht die These, wonach die Vermeidung infinitesimaler Prozesse in der Geometrie als Reaktion auf die Zenonschen Paradoxien zu werten sei. Autoren, die die Eigenständigkeit mathematischer Forschung betonen, verneinen einen solchen Einfluss vehement: "The roots of the 'exhaustion' method of Eudoxus lie not in mathematicians' distress over philosophical puzzles but in the evolution of techniques such as those of Hippocrates. This view of an autonomous development within the geometric field is surely more plausible than the gratuitous assumption of external influences." [Knorr 1982, S. 135]

[Baron 1969, S. 35]. Da nach Voraussetzung der Kreis grösser als das Dreieck ist, also C - E > 0, existiert demnach ein festes n, sodass die Fläche von p_n die von E übertrifft.

FIGUR 4-1 Beweis durch polygonale Approximation [Archimedes 1967, S. 369]



Durch Ziehen des Lots vom Kreiszentrum zu den Mittelpunkten der Seiten kann p_n in rechtwinklige Dreiecke mit einer Kathete NX kleiner als der Radius des Kreises zerlegt werden. Da die geraden Strecken kürzer als die Kreisbogen sind, ist die Summe der anderen Katheten, den einbeschriebenen Seiten AX, auch kleiner als der Umfang des Kreises, der nach Voraussetzung der anderen Kathete von E entspricht. Dann wäre die Fläche von p_n kleiner als die von E, womit wir auf einen Widerspruch zur Aussage, dass p_n die Fläche von E übertrifft, gestossen sind.

Durch die ensprechenden Überlegungen anhand umschriebener Polygone wird auch die Annahme, dass die Fläche des Kreises C kleiner als die des Dreiecks E sei, zu einem Widerspruch geführt. Daraus folgt, dass die Fläche des Kreises gleich der des Dreiecks E ist.

4.1.2 Keplers Veranschaulichung

Kepler empfand die Methode des doppelten Widerspruchs als kompliziert und wenig einsichtig.

> "Die strengen und bis ins Kleinste durchgearbeiteten Beweise möge man nämlich in den Büchern von Archimedes selbst nachlesen, wenn man nicht vor der dornenvollen Lektüre zurückschreckt." [KGW Bd. IX, S. 13 (Hammer 1955, S. 438)].

Mit dieser Einschätzung stand Kepler nicht alleine. Immer wieder wurde im 17. Jahrhundert die indirekte Beweisführung des Archimedes als zwar sicher aber kaum verständlich kritisiert und deshalb mit anschaulicheren Vorgehensweisen ergänzt. Der jesuitische Mathematiker Paul Guldin (1577-1643) fügte seinem Werk über die Schwerpunktbestimmung[7] den Untertitel *Archimedes Illustratus* hinzu, weil er "die obskuren archimedischen Beweise durch klare und einsichtige ersetzt" [Mancosu 1996, S. 58].[8]

[7] *De Centro Gravitatis, liber quartus, de gloria, ab usu centri gravitatis binarum specierum Quantitatis continuae parta. Sive Archimedes Illustratus*, Wien 1641.

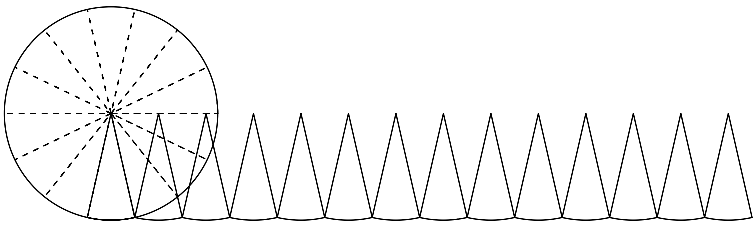
Nichts deutet also auf Geringschätzung für den antiken Geometer oder eine Überschätzung der eigenen Fähigkeiten, wenn Kepler den allseits bekannten und akzeptierten, aber dennoch kaum zur Bestimmung unbekannter Inhalte einsetzbaren[9], Widerspruchsbeweis durch einen konstruktiven, Einsicht schaffenden Weg zu ersetzen sucht.

> "Archimedes benützt einen indirekten Beweis, der auf Unmögliches führt. Darüber haben viele vielerlei geäussert. Mir scheint der Sinn dieser zu sein." [KGW Bd. IX, S. 15 (Hammer 1955, S. 439)]

Um aufzuzeigen, wieso Archimedes die Kreisfläche zu eben diesem rechtwinkligen Dreieck mit dem halben Durchmesser und dem Kreisumfang als Katheten und nicht zu einer anderen Figur in Beziehung setzt, appelliert Kepler an die Vorstellung, dass der Kreis aus unendlich vielen "sehr dünnen" Sektoren besteht.

> "Der Umfang des Kreises *BG* hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln *AB*, so dass in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke zusammenstossen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden *BC* ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden *BC* abgebildet (imaginatae) und nebeneinander angeordnet." [KGW Bd. IX, S. 15 (Kepler 1908, S. 101)]

FIGUR 4-2 Abrollen der Kreissegmente



Die kumulierte Basis dieser unendlich vielen Dreiecke ist gleich dem Umfang des Kreises, die Höhe jedes Dreiecks ist der halbe Kreisdurchmesser. Nach der bekannten euklidischen Formel ist die Dreiecksfläche gleich der Hälfte des Produkts von Grundseite mal Höhe, womit in unserem Fall die Fläche des Kreises mit dem Viertel des Produkts von Umfang und Durchmesser gleichgesetzt werden kann.

Kepler teilt also nicht etwa den Kreis in eine endliche Anzahl Sektoren, um dann zu zeigen, dass beim auf Verfeinerung der Unterteilung basierenden Grenzprozess der Fehler der inneren und äusseren Approximation durch Dreiecke gegen Null strebt:

---

8. Für weitere Kritik an Archimedes im 17. Jahrhundert siehe [Mancosu 1996, S. 63]. Besonders deutlich sind die Worte von G. Nardi aus dem Kreis um Bonaventura Cavalieri (1598?-1642): "Archimedes' admirers need to excuse his oblique procedure; both because it is long and complicated in the constructions and the proofs and because it is not completely satisfactory, since it produces certainty but not evidence. I am of the opinion that everything evident is certain but not everything certain is evident."

9. Das antike Beweisverfahren setzt die auf beliebige Weise gewonnene Kenntnis des Resultats voraus.

> "Statt dessen operiert er sofort mit unendlich kleinen Teilen, deren es ebensoviele gebe als der Kreis Punkte hat. Seine Sektoren schmelzen also zu Linien zusammen, die nach Belieben als Dreiecke oder Sektoren aufgefasst werden können. Als Dreiecke haben sie alle gleiche Basis und gemeinsame Höhe, jedes einzelne ist daher gleich dem entsprechenden Teil des rechtwinkligen Dreiecks, schliessliche also auch die Kreisfläche gleich dem rechtwinkligen Dreieck. Keplers Erklärung schliesst mit den Worten: 'Das bedeutet die archimedische Zurückführung auf Unmögliches'. Dieser Schluss ist nochmals die Bestätigung dafür, dass Kepler sein der nötigen Strenge entbehrendes Verfahren nicht als Beweis betrachtet hat, sondern nur als Versuch, den archimedischen Beweis durchsichtbar zu machen." [Hammer 1955, S. 440]

4.1.3 Infinitesimalen bei Kepler

Infinitesimaltechniken führte Kepler zuerst zum Studium der ungleichförmigen Bewegung entlang der elliptischen Planetenbahnen ein.

> "But the application of mathematics to a non-uniform motion in a non-circular orbit involved the consideration of infinitesimals. In order to describe the continuously changing motion, the path had to be divided into infinitesimal arcs traversed in infinitesimal elements of time. This was an entirely new problem, for the solution of which Kepler had to develop his own techniques." [Aiton 1973, S. 285]

Die Vorstellung von Infinitesimalen, also unendlich kurzen Linienstücken oder unendlich dünnen Flächen, denen dennoch Ausdehnung zukommt und die deshalb weiter geteilt werden können, geht auf Überlegungen von Nicolaus von Kues (1401-1464) zurück.[10] Dass Kepler mit dessen Ideen vertraut war, wissen wir aus einem Brief vom 5. April 1608 an J. G. Brengger: "Cues habe vom unendlichen Kreis gesagt, dass er eine gerade Linie sei."[11]

In der *Nova Stereometria* finden wir eine ähnliche Vorstellung in Theorem I. Kepler meint, dass man ein kurzes Kreissegment als gerade Linie annehmen darf, "da im Verlaufe der Darlegung der Kreis in kleinste Bogen zerschnitten wird, welche Geraden gleichgesetzt werden"[12].

Die Aufhebung des von den antiken Geometern für unauflösbar gehaltenen Gegensatzes von gekrümmt und gerade im Unendlichen war unter den Zeitgenossen Keplers umstritten. Guldin kritisierte Kepler, da es keinen geometrischen Beweis gäbe, wonach ein kreisförmiger Bogen, wie klein er auch sei, mit einer geraden Linie gleichgesetzt werden könne [Aiton, S. 290]. Trotzdem akzeptierte er die Fruchtbarkeit von Keplers neuer Methode:

> "Zwar will der archimedische Beweis auf dasselbe hinaus, aber nicht mit den Mitteln, derer sich Kepler in der Herleitung bedient. Es handelt sich da um eine neue Beweismethode, freilich weder archimedisch noch euklidisch, jedoch, um der Wahrheit die Ehre zu geben, durchaus nicht zu verschmähen. Hier hat nämlich Bonaventura Cavalieri die Handhabe und Anregung gefunden, sein

[10] "The relation between point and space, as conceived by Cusa, is thus a metaphysical one; the point is the 'substance' of space and the now is the 'substance' of time. But the point and the instant are not parts of space and time, for the quantity cannot be composed of non-quantitative elements. In the continued division of the line, the point is never reached. An infinitely small line is thus a non-zero but infinitely small line-segment, in other words, an infinitesimal." [Aiton 1973, S. 286]

[11] "Et Cusanus infinitum circulum dixit esse lineam rectam." [KGW Bd. XVI, S. 141]

[12] "Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonstrationis secat circulum in arcus minimos, qui aequiparuntur rectis." [KGW Bd. IX, S. 14]

'Methode der Indivisibeln', durch welche nach seinem Urteil die Geometrie gefördert wurde, zu schaffen, wie er im Vorwort dieses Buches selbst andeutet." [Übersetzung Hammer 1955, S. 485]

4.2 Mathematische Grössen: Messung und Näherung

Kepler orientiert sich in der *Nova Stereometria* immer an der Anwendung der mathematischen Sätze für die Fassrechnung. Dies mag der Grund für die uns so irritierende Aussage von Theorem I sein, wonach das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser - der Wert stammt aus der Näherung mit dem regulären Sechseck - "sehr nahe gleich" dem der Zahlen 22 und 7 sei. Natürlich weiss Kepler, dass dieser Wert bloss eine erste Näherung darstellt, die beliebig verbessert werden kann: Adrianus Romanus habe mit derselben Methode die viel genauere Approximation von 62831853071795862 zu 20000000000000000 bestimmt [KGW Bd. IX, S. 15].[13]

Die Notwendigkeit, in Anwendungen das später mit π bezeichnete Verhältnis von Umfang zu Durchmesser durch einen Zahlwert zu ersetzen, gibt Kepler in der deutschen Fassung seines Werks Anlass, über die Beziehung von Messung und Rechnung zu sinnieren. Er erinnert daran, wie einfach der Schmied für eine neue Bereifung etwa den Umfang des Rades bestimmt:

> "Zu wissen wie weit es umb ein Rad herumb sey / das ist zwar dem Schmid / Wagner und Fuhrman eine leichte sach. Sie schalten den den Wagen fürsich nach der geräde / so lang / biß der eine Nagel / der anfangs zu underst gestanden / einmal herumb / und wider undersich kompt; der trucket zu baiden malen einerley grüblin in den Boden; so hat man dann die ganze krümme deß Rades zwischen beyden grüblein in die geräde ausgestreckt / und mag sie dann mit Schuchen oder mit Elen abmessen / wie man wil / oder dessen bedürfftig ist." [KGW Bd. IX, S. 145]

Wo eine direkte Messung nicht möglich ist, ist eine rechnerische Approximation erforderlich. Doch unabhängig davon, wie genau diese ausgeführt wird: Stets bleibt ein Fehler stehen, da das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser nicht durch ein einfaches Zahlenverhältnis auszudrücken ist.

> "Dabey zu wissen daß es nicht nach der Scherffe zuverstehen / wann man sagt der umbkreiß halte sich gegen dem *diameter* oder breitte wie 22 gegen 7. Dann es ist nicht müglich einen einzigen gleichen theil von dem *diameter* zunemen / welcher den umbkreiß gerad außmesse; ja wann man gleich den *diameter* theilete in zweintzig tausent tausent tausent tausent mal tausent gleicher stücklein / so wirt doch etwas uberbleiben / das weniger ist / dann ein solches kleines stücklein / dann der umbkreiß wirdt alsdann sein 62 831 853 071 795 861 solcher kleiner theil und noch ein wenig drüber / doch nit so vil / das es gar / etc. 862 werden." [KGW Bd. IX, S. 146]

4.3 Die weiteren Sätze

Wie den Kreis in infinitesimale Dreiecke kann Kepler auch den Zylinder in unendlich dünne Prismen abrollen oder die Kugel als unendlich viele Kegel denken. So lesen wir im Beweis von Theorem XI, der Aussage, dass sich das Volumen der Kugel zu dem des umschriebenen Zylinders wie 2 zu 3 verhält:

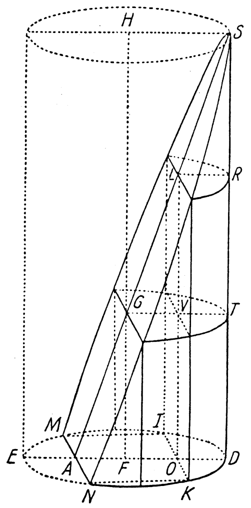
---

[13] Adriaen Van Roomen (1561-1615) publizierte diesen Wert in seinen *Ideae mathematicae*, Louvain 1593 [Struik 1969, S. 194]. Nach [List, Bialas 1973, S. 108] traf Kepler bei seinem ersten Besuch von Tycho de Brahe im Jahre 1600 den in Prag weilenden Van Roomen.

> “Analog zu dem, was bei Theorem II gesagt wurde, enthält die Kugel potentiell unendlich viele Kegel, die mit ihren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel zusammenstossen, indes die Grundflächen, die durch einen Kreis repräsentiert werden, auf der Oberfläche aufliegen.” [KGW Bd. IX, S. 23 (Hammer 1955, S. 440)][14]

Dass Keplers Beweise aber nicht bloss eingängigere Umformulierungen der archimedischen sind, zeigt sich bei den drei letzten Theoremen XV bis XVII, die er so bei Archimedes nicht finden konnte. Theorem XV löst das Problem der Bestimmung dreier Flächen, die im selben Verhältnis zueinander stehen sollen, wie die beiden Kugelsegmente, die durch den Schnitt einer Ebene mit einer Kugel entstehen, untereinander und zur Gesamtkugel.[15]

In Theorem XVII führt Kepler die für den nächsten Abschnitt zentralen Körper ein, die durch den Schnitt des Zylinders mit einer Ebene entstehen. Der wichtigste ist der “Zylinderhuf”, wo die Schnittebene die eine Grundfläche berührt und die andere schneidet.



FIGUR 4-3 Der Zylinderhuf [KGW Bd. IX, S. 50 (Schema XIX)]

Die Volumina solcher Zylinderhufe über demselben Kreissegment verhalten sich zueinander wie die Verhältnisse ihrer Höhen.[16] Für den Spezialfall, dass die Grundfläche des Zylinders gleich einem Halbkreis mit dem Radius r ist, gibt Kepler das Verhältnis des Zylinderhufs H zum entsprechenden Zylinder Z über dem Kreis mit Radius r und der Höhe h mit 7 zu 33 an [KGW Bd. XI, S. 33].
Wenn wir wie in Theorem I 22/7 durch die Kreiszahl π ersetzen, entspricht dies der Volumenformel für diesen Zylinderhuf in symbolischer Schreibweise $H = \frac{7 \cdot 22}{33 \cdot 22} \cdot Z \cong \frac{2}{3 \cdot \pi} Z = \frac{2}{3 \cdot \pi} \pi h r^2 = \frac{2}{3} h r^2$.[17]

---

[14] Zu Keplers Interpretation der Kugel als unendliche Zahl von Kegeln schreibt Guldin: “Endlich schliesst er, dass sich der (umbeschriebene) Zylinder zum Volumen der Kugel verhalte wie 3 zu 2. Wie seinerzeit der König Agrippa, als Paulus vor ihm disputierte, diesem zurief, ‘beinahe überredest du mich, ein Christ zu werden’, so bringt auch mich Kepler mit seinen Argumenten beinahe soweit, ein Keplerianer zu werden, aber mich schreckt der Gebrauch unendlich vieler Teile ebenso ab, wie die Meister, Vertreter und Anhänger einer reineren Geometrie.” [Übersetzung Hammer 1955, S. 487]

[15] “Quaeruntur tria plana quae habeant inter se proportionem eam quam duo segmenta Globi inter se et ad totum.” [KGW Bd. IX, S. 28]

[16] “Itaque etiam de his cylindraceorum segmentorum segmentis valet axioma, non minus quam de Conis et Pyramidibus quod quae insistant eidem segmento circuli, sint inter se ut altitudines: quae verò eidem lineae segmenti circularis, sint ut segmenta altitudinis respondentia.” [KGW Bd. IX, S. 34]

[17] Ohne dass Kepler dies wissen konnte, hatte Archimedes in der erst 1906 durch J. L. Heiberg wiederentdeckten “Methodenlehre” das Volumen des speziellen Zylinderhuf mit $h = r = d/2$ mit $d^3/6$ bestimmt [Archimedes 1967, S. 397. Zur Entdeckungsgeschichte dieser Schrift ebda, S. 381f].

5 Keplers Zusatz zu Archimedes: Die Rotationskörper

Archimedes hatte in *De conoidibus et sphaeroidibus* nur Rotationskörper betrachtet, die durch Drehung von Ellipse, Parabel und Hyperbel um ihre Hauptachsen erzeugt werden können. Kepler zielt in seiner Suche nach einem mathematischen Körper, der das Weinfass mit kreisrundem Boden möglichst gut annähert, über seinen Lehrmeister hinaus.

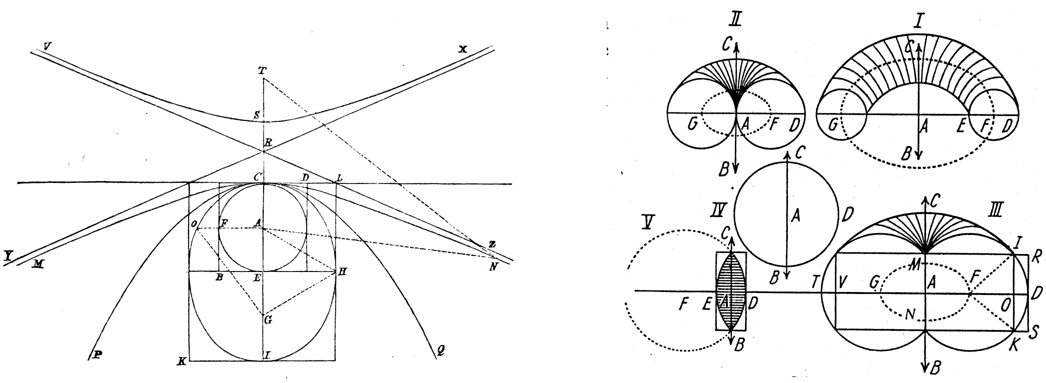
> "Bis hierher kamen Archimedes und die alten Geometer bei ihren Studien über die Körper, welche von ihnen auf der nächstfolgenden Stufe erzeugt werden. Da sich indes die Fassfigur etwas weiter von den regulären Figuren entfernt, so glaubte ich lohnende Arbeit zu leisten, wenn ich, gleichsam auf einer einzigen Stammtafel zusammengefasst, ihre und verwandter Figuren Entstehung sowie die Grade der Verwandtschaft mit den regulären Figuren vor Augen führe in den Absicht, einerseits die nachfolgenden Beweise durchsichtiger zu machen, andererseits aber auch den Arbeitseifer der Geometer unserer Zeit anzuspornen. Nachdem jetzt die Tore zu dem endlos weiten Feld der Geometrie aufgestossen sind, möchte meine Arbeit Klarheit darüber schaffen, was noch zu vervollkommnen, was neu zu erforschen ist." [KGW Bd. IX, S. 37 (Hammer 1955, S. 441)]

Ein grosser Teil der Arbeit wäre Kepler abgenommen worden, wenn er die wichtigste Erweiterung der Stereometrie nach Archimedes, den Satz von Pappus aus dem 3. Jahrhundert n. Chr.[18], wie er in der Pappus-Ausgabe des Commandino von 1588 zu finden war, auf seine Probleme angewendet hätte.[19]

5.1 Klassifikation der Rotationskörper

Kepler betrachtet die vier Kegelschnitte Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, die er zur Erzeugung von Rotationskörpern um fünf verschieden positionierte Achsen rotieren lässt.

FIGUR 5-1 Kegelschnitte [Kepler 1908, S. 6 (Fig. 1)] und aus dem Kreis hervorgehende Ringkörper [KGW Bd. IX, S. 39 (Schema XI)]



[18] "Rotationskörper verhalten sich zueinander wie die jeweiligen Produkte der Flächen der rotierenden Figuren in die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Rotationsachse." [Übersetzung Hammer 1955, S. 431]

[19] [Bulmer-Thomas 1994] widerlegt die Erklärung von [Hofmann 1973, S. 278], wonach Keplers Unkenntnis des Satzes auf eine zerstümmelte Fassung in der Commandino-Ausgabe zurückzuführen wäre.

Aufgrund der Asymmetrie von Ellipse, Parabel und Hyperbel erhält Kepler auf diese Weise 92 unterschiedliche Körper, denen er Namen von Früchten und Gebrauchsgegenständen verleiht.

> "So wird die Ellipse in zwei ähnliche Hälften geteilt, deren jede bei der Drehung um *OS* einen Körper von der Form einer Birne (pyrum) erzeugt, die natürlich zu den Äpfeln, Quitten und Pflaumen gehört, damit der Nachtisch vollständig wird." [KGW Bd. IX, S. 43 (Kepler 1908, S. 13f)]

5.2 Die Berechnung der Ringkörper

Kepler interessiert sich mit Blick auf die Weinfässer nur für eine kleine Zahl der oben angeführten Körper. Mit den anderen "mögen sich die Geometer beschäftigen nach dem Beispiele des Archimedes" [KGW Bd. IX, S. 47 (Kepler 1908, S. 18)]. Zuerst wendet er sich den einfachen Ringkörpern zu und formuliert den folgenden Satz, einen Spezialfall der Pappus-Guldinschen Regel.

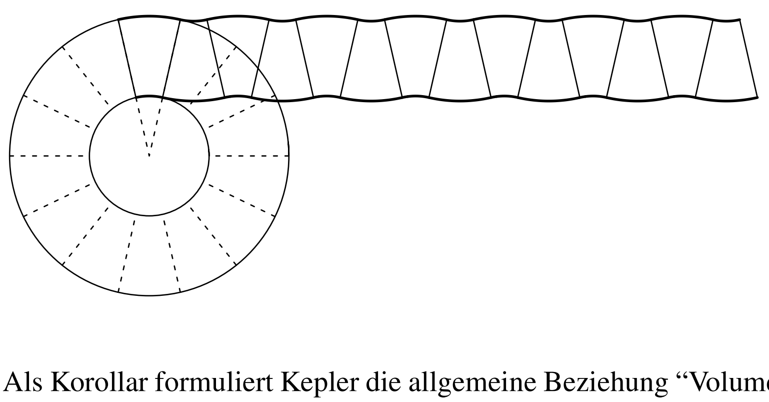
> "Lehrsatz XVIII. Jeder Ring mit kreis- oder ellipsenförmigem Querschnitt ist gleich einem Zylinder, dessen Höhe gleich dem vom Mittelpunkt der Figur bei der Rotation beschriebenen Kreisumfang, und dessen Grundfläche der Querschnitt ist." [KGW Bd. IX, S. 47 (Kepler 1908, S. 18)]

Dem Leser versichernd, dass auch dieser Satz "auf dieselben Elemente gestützt werden [kann], mit denen Archimedes die Grundsätze der Stereometrie vorträgt" [ebda, S. 47], stützt sich Keplers Argumentation wiederum auf eine Heuristik mit infinitesimalen Scheiben.

> "Wenn man nämlich den Ring *G C D* durch Schnitte aus dem Zentrum *A* in unendlich viele und sehr dünne Scheiben zerschneidet, so wird eine Stelle der Scheibe gegen den Mittelpunkt *A* hin um so viel schmäler sein, als diese Stelle, z. B. *E*, dem Mittelpunkt näher liegt als *F* oder eine durch *F* in die Schnittebene zu *ED* gezogene Normale, und um soviel breiter in dem äusseren Punkte *D*. Danach wird, wenn man *D* u. *E* zugleich betrachtet, die Dicke an diesen beiden Stellen zusammen doppelt so gross sein, wie in der Mitte der Scheiben." [KGW Bd. IX, S. 47 (Kepler 1908, S. 19)]

Wenn wir also bei der sehr dünnen Scheibe von der Krümmung absehen, erhalten wir schief abgeschnittene Zylinderscheiben. Da sich zu jeder Scheibe eine zweite gleiche finden lässt, erhalten wir durch Aufeinanderstapeln einen Zylinder mit parallelen Grundflächen und der Höhe des durch die Scheibenmittelpunkte bei der Rotation beschriebenen Kreisumfangs.

FIGUR 5-2 Transformation des Kreisrings in einen Zylinder



Als Korollar formuliert Kepler die allgemeine Beziehung "Volumen gleich Kreisumfang des Mittelpunkts der Figur multipliziert mit der Querschnittsfläche" für Ringe mit beliebigen Querschnittsflächen, "sobald nur die Schnitte in der durch *AD* senkrecht zur Ringfläche

gelegten Ebene diesseits und jenseits von *F* gleich und gleich gelegen sind" [KGW Bd. IX, S. 47f (Kepler 1908, S. 19)], etwa im Fall der quadratischen Querschnittsfläche. Da bei der Rotation des Quadrates ein Zylinderrohr entsteht, dessen Volumenformel Kepler bereits kennt, kann er die ohne Beweis formulierte Verallgemeinerung in diesem Fall durch eine konkrete Rechnung testen [KGW Bd. IX, S. 48].

5.2.1 Keplers Verzicht auf analytische Methoden

Guldin zweifelt zwar an der Rückführbarkeit von Keplers Beweis auf archimedische Prinzipien, gesteht aber gerne zu, dass Kepler nur wenig zu einer noch allgemeineren Formulierung des Satzes fehlte.

> "Schnell und leicht soll dieser Satz aus den Elementen der Geometrie des Archimedes hervorgehen, warum aber, ist nicht so leicht ersichtlich. Insbesondere weiss Archimedes nichts von den unendlich dünnen Scheiben. Richtig ist, dass die Scheibchen dies- und jenseits des Umfangs, den wir via rotationis nennen, gleich und gleich gelegen sein müssen. Denn dies verlangt das Zentrum gravitatis. Nichts fehlt Kepler zu meiner Methode, als der Begriff der via rotationis." [Übersetzung Kepler 1908, S. 112]

[Hammer 1955, S. 443] meint, dass Kepler bei der Verwendung einfacher analytischer Mittel zwangsläufig auf eine derartige Aussage gestossen wäre. Da für Kepler aber eine enge Verknüpfung zwischen geometrischer Konstruierbarkeit und Erkennbarkeit durch den menschlichen oder allwissenden Verstand bestand, lehnte er die Anwendung der "Cossa"[20] auf geometrische Probleme ab [Hammer 1955, S. 429]. Aus Gründen der Zeitersparnis empfiehlt Kepler zwar die Verwendung von Sehnen- und Sinustabellen, "[...] weil es gleichwol viel Kopffbrechens gibt / und man nicht nur von lusts wegen an disen Sennen oder *subtensis*, oder ihren halbtheilen den *sinibus* behangen kan [...]" [KGW Bd. IX, S. 147]. Wo aber Berechnung nicht mehr geometrische Konstruktion ist, geht die Erkenntnis verloren; arithmetische Näherungen vergleicht Kepler mit dem blinden Tasten in der Dunkelheit.

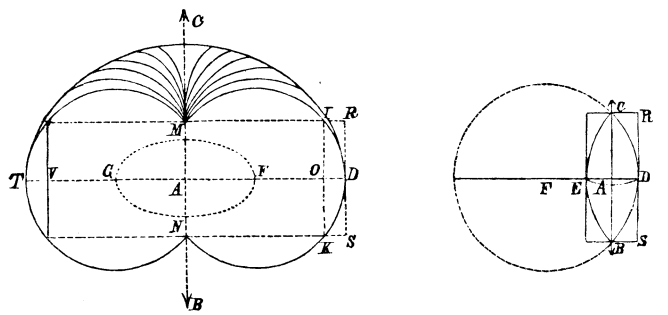
> "Es ist zu wissen / das ein jedes stuck vom Circkel seine gemessene untergespannene Senne hat: Auß welchen etliche nach der scherpffe mit voller kunst benennet werden, etliche aber nicht nach der scherpffe / nicht mit völliger *Geometri*scher kunst / als mit offenen Augen / sondern allein beynahe (wie es sich auch mit dem ganzen Circkel gegen seinen *diameter* verhelt) und durch die Cossa / welche uns den weg weiset / wie einem blinden sein führer / oder zwo enge wände in der finstere / wann ich den Kopff zur lincken anstosse / so weiß ich / das ich mich zur rechten wenden soll / den weg aber sehe ich nicht / kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen." [KGW Bd. IX, S. 146f]

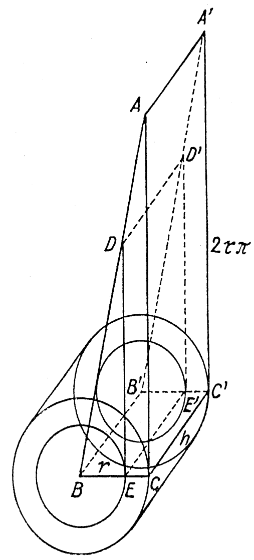
[20] Der Name "Cossa" leitet sich vom italienischen Wort "cosa" für die Unbekannte einer Gleichung ab und bezeichnet die im 16. Jahrhundert aufkommende symbolische Algebra. François Viète zeigte in Schriften wie der *In artem analyticen isagoge* von 1591, wie sich die Buchstabenrechnung zur Lösung geometrischer Probleme einsetzen lässt. Insbesondere die Herstellung von Sinustabellen profitierte von der Möglichkeit, mittels der Coss, also über die Auflösung von Gleichungen, geometrisch nicht konstruierbare Winkelteilungen wie die Dreiteilung durchführen zu können [List; Bialas 1973, S. 114].

5.2.2 Theorem XX: Das Volumen des Apfels

Mit welcher Sicherheit Kepler schwer zu bestimmende Volumina in inhaltsgleiche, einfachere Formen transformiert, zeigt sich am deutlichsten bei der exakten Berechnung des Volumens des Apfels, der bei der Rotation eines angeschnittenen Kreises entsteht.[21]

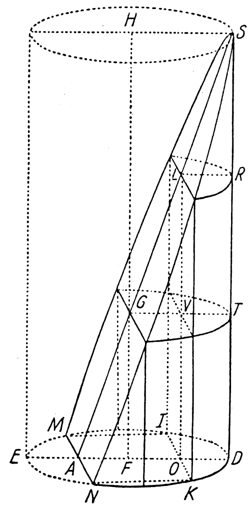
FIGUR 5-3 Der Apfel und die Zitrone [Kepler 1908, S. 7 (Fig. 2)]





FIGUR 5-4 Entrollen der Zylindermäntel [Hammer 1955, S. 443 (Fig. I)]

Kepler transformiert den Apfel in einen Zylinderhuf, der durch Positionierung der "entrollten" Zylindermäntel, die durch die Rotation der Geraden parallel zu *MN* um *A* entstehen, auf der Grundfläche gebildet wird [KGW Bd. IX, S. 49f



Der Apfel wird von Kepler zuerst in einen "Apfelzylinder" (Rotation von *MNKI* um *MN*), dessen Volumen aufgrund der Symmetrie der Fläche *MNK* nach dem obigen Korollar zu Lehrsatz XVIII (von Kepler für diesen Spezialfall im Folgesatz zu Satz XIX nochmals explizit formuliert) leicht als Flächeninhalt multipliziert mit dem Weg des Zentrums *F* bestimmt werden kann, und den "Apfelgürtel", der durch die Rotation von *KID* um *MN* erzeugt wird, zerlegt. Der nebenstehenden Skizze entnehmen wir, dass sich dieser Apfelgürtel nach der Keplerschen Transformation aus dem geraden Zylindersegment über *IKD* bis *LR* und dem kleinen Zylinderhuf *LRS* zusammensetzt. Entscheidend für den Erfolg der Rechnung ist die alternative Zerlegung dieser beiden Körper, die in Lehrsatz XX formuliert wird:

> "Der Apfelgürtel [zona mali] setzt sich zusammen aus dem [entsprechenden] Kugelgürtel [zona globi] und dem geraden Zylindersegment [IKDTV], dessen Basis das Kreissegment ist, das an der

[21] Wer Keplers Ausführungen nicht auf Anhieb folgen kann, mag sich durch die Worte Guldins trösten lassen: "Wieviele werden es wohl sein, die, völlig an die üblichen Archimedischen und Euklidischen Beweise gewöhnt, beim Lesen des 20. Theorems von Kepler die Methode dieser Transformationen begreifen, besonders, da der Gegenstand zu dunkel vorgetragen wird? Ich jedenfalls wollte mir nicht, wie man zu sagen pflegt, Kopf oder Hirn zerbrechen, um tiefer darin einzudringen." [Übersetzung Hammer 1955, S. 494]

> den Apfel erzeugenden Figur fehlt, während seine Höhe [FG] gleich dem Umfang des Kreises ist, den der Mittelpunkt [F] des grösseren Segmentes beschreibt.” [KGW Bd. IX, S. 49 (Hammer 1955, S. 445)]

Das Volumen des geraden Zylindersegments über *IKD* mit der Höhe *FG* ergibt sich als einfache Multiplikation der Grundfläche mit der Höhe. Damit fehlt bloss noch die Volumenbestimmung des Kugelgürtels, die sich einfacher als die des Apfelgürtels gestaltet, da die Rotationsachse (der Durchmesser durch den Punkt *G*) beim Kugelgürtel durch das Zentrum desjenigen Kreises führt, dessen Segment *VT* rotiert wird.
Das Volumen des Kugelgürtels ist die Differenz des Zylinderprisma *GTS*, dessen Volumen gleich dem Volumen der Kugel mit Radius *GT=FD* ist[22] und einem neuen Körper *GVL*. Das Volumen von *GVL* wiederum ist gleich dem Volumen des zylinderähnlichen Körpers (Zylinder mit zwei aufgesetzten Kugelsegmenten), der bei der Rotation von *MNKI* um die Achse durch *F* senkrecht auf *AD* entsteht. Die Anweisung für die Berechnung der Kugelsegmente kannte Kepler aus der Proposition II des zweiten Buchs von *De Sphaera et Cylindra* [Archimedes 1967, S. 132] und bildet den Lehrsatz XIV des Abschnitts über die archimedische Stereometrie.[23]

Damit sind alle Einzelteile des Apfels bestimmt. Kepler folgend, führen wir die Volumenbestimmung nochmal Schritt für Schritt durch [KGW Bd. IX, S. 50f]:

1. “Es muss gegeben sein die Länge *MN* des fehlenden Segments im Verhältnis zum Durchmesser oder Halbmesser *FD* des Kreises.” [KGW Bd. IX, S. 50 (Kepler 1908, S. 23)]

   Dann wird für *IK=MN* der Winkel α durch die Beziehung $\sin\alpha = \frac{IK}{2} \div FD$ definiert.
2. Die Fläche des Kreissektors *IFK* verhält sich zur Fläche des Kreises mit dem Halbmesser *FD* wie α zu 2π. Wenn wir von diesem Kreissektor die Fläche des Dreiecks $IFK = \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot IK \cdot FD$ subtrahieren, erhalten wir die Fläche für das Kreissegment *IKD*.
3. Die Fläche dieses Kreissegments multipliziert mit der Höhe $FG = 2\pi\ AF$ ergibt nach Theorem XX den ersten Teil des Apfelgürtels.
4. Ziehen wir von der gesamten Kreisfläche die doppelte Fläche des Kreissegments *IDK* ab, erhalten wir die Fläche des Kreises zwischen *MN* und *IK*. Mit dem Umfang des Kreises *AF* multipliziert, ergibt sich das Volumen des zynlindrazeischen Körpers, der das Volumen des “Kern” des Apfels innerhalb des Gürtels ausmacht.
5. Es bleibt nun noch die Berechnung des Kugelgürtels, der den zweiten Teil des Apfelgürtels bildet. Aus *IK* folgt über die Beziehung $IK \div MI = \tan\alpha$ die Länge von *MI*. Das Volumen des Kugelgürtels ist die Differenz zwischen der Kugel über dem Radius *FD* und dem Zylinder mit den beiden aufgesetzten Kugelsegmenten, der bei

[22] Dies wird einsichtig, wenn wir uns Keplers Transformation rückwärts denken, d. h. die Ebenen normal zu *GT* zu um die Achse um *G* konzentrisch angeordneten Zylindermänteln einrollen.

[23] “Lehrsatz XIV: Mit dem Kugelabschnitt ist ein Kegel über demselben Grundkreis inhaltsgleich, dessen Höhe die Höhe des Abschnitts um eine bestimmte Strecke übertrifft; diese Strecke verhält sich zum Kugelhalbmesser wie die Höhe des Segments zum Rest des Durchmessers.” [KGW Bd. IX, S. 27 (Kepler 1908, S. 4)]

der Rotation des Kreises zwischen *MN* und *IK* um die Achse durch *F* parallel zu *MN* entsteht. Das Volumen der Kugelsegmente ist durch die Angabe von *MI* bestimmt, ebenso wie das des Zylinders durch die Basis *MI* und die Höhe *MN*.

Auf ähnliche Weise berechnet Kepler im folgenden Theorem das Volumen der Zitrone und der beidseitig abgestumpften Zitrone, die der Form des österreichischen Fasses schon recht nahe kommt. Um die durch Approximation entstehenden Fehler abschätzen zu können, vergleicht er an einem konkreten Zahlenbeispiel das Volumen des Zitronenstumpfs mit dem des entsprechenden Doppelkegels [KGW Bd. IX, S. 57-60]. Der Umgang mit bis zu sechzehnstelligen Zahlen ohne eine Dezimalnotation[24] führt aber zu einer Reihe von Fehlern, die das Schlussresultat wesentlich verfälschen [Hammer 1955, S. 497].

Den Grund für den Erfolg seiner neuen Methode resümierend, leitet Kepler zur nächsten Fragestellung, der Volumenbestimmung der Spindeln, die durch die Rotation von Parabel- oder Hyberbelsegmenten erzeugt werden.

> “Bisher waren uns der Zylinder und die Kugel oder an ihrer Stelle das Sphäroid, welche in Zylinderabschnitte verwandelt wurden, behilflich bei der Auffindung der Inhalte der Äpfel, Zitronen, Quitten, der niedrigen Kürbisse, der Oliven und elliptischen Pflaumen. Denn da wir die Gesetze für alle diese Körper nicht aus ihrer Gestalt entwickeln konnten, fanden wir Masse für die Teile der Körper in den Teilen von Zylindern. Da aber für gewisse Teile des Zylinders eine sichere Berechnungsmethode vorliegt, so vermittelten die Kugel und die Sphäroide die Kenntnis oder die Gesetze der Raumbestimmung, Gesetze, die in ihnen entweder nicht enthalten oder bisher nicht ans Licht gebracht worden sind; diese Körper, welche vor den andern eine Berechnungsmethode voraus haben, liessen, in einen derartigen Zylinderteil transformiert, die Anwendung der nämlichen Rechenmethode auch auf den Zylinder zu. Es steht uns jetzt noch die etwas schwierigere Untersuchung der parabolischen und hyperbolischen Spindeln bevor, wobei uns die bisher angewandte Methode wiederum im Stich lässt.” [KGW Bd. IX, S. 60 (Kepler 1908, S. 30)]

Hier scheitert Kepler aber bei der exakten Berechnung [Hammer 1955, S. 445f] und gibt auch einige falsche Sätze an. Hilfesuchend wendet er sich an Willibrord Snel (1580-1626), den er als jungen Mann in Prag kennengelernt hatte [Hammer 1955, S. 448].

> “Wohlan denn, *Snellius*, du Leuchte unter den Geometern unseres Jahrhunderts[25], erbringe uns einen rechtmässigen Beweis für dieses Problem und andre hier erwünschte Lehrsätze; dir ist, wenn ich nicht irre, die Entdeckung vorbehalten, dass es einen Mäzenas gibt, der voll Hochachtung und Bewunderung deines glänzenden Namens dir ein eines solchen erfindungsreichen Geistes würdiges Geschenk darbringt, durch welches du nämlich auch eine bedeutende Vergrösserung deines Vermögens erfahren würdest, und dich für die Berechnung der Zitrone mit einem goldenen Apfel belohnt.” [KGW Bd. IX, S. 71 (Kepler 1908, S. 44)]

Keplers Aufruf zeigte wenig Resonanz. Das neuartige Vorgehen wird von seinen Zeitgenossen skeptisch bewertet. Neben den bereits erwähnten Kommentaren Guldins wird dies

---

[24] Kepler erkennt nur wenig später den praktischen Nutzen einer solchen Schreibweise. Bei der Berechnung des Zitronenstumpfs in §60 der *Messekunst* führt er die “behende Bruchrechnung”, wie er sie bei Joost Bürgi (1552-1632) kennengelernt hatte, ein. Die Nachkommastellen werden jeweils durch eine runde Klammer abgetrennt. Kepler führt als Beispiel die Rechnung 3(65 mal 6 facit 21(90 an [KGW Bd. IX, S. 194].

[25] Später nennt Kepler Snel und Van Roomen “die beiden *Apollonius* Belgiens” [KGW Bd. IX, S. 104 (Kepler 1908, S. 79)].

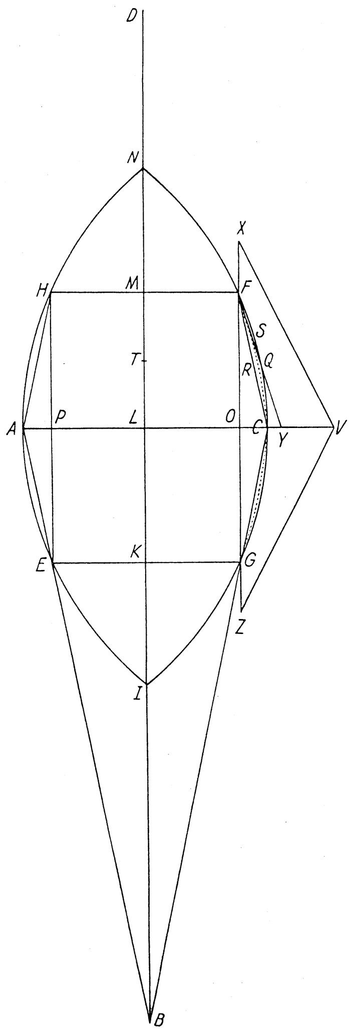
besonders bei Alexander Anderson, einem Schüler von François Viète, deutlich, der in den *Vindiciae Archimedis* von 1616[26] Kepler Etikettenschwindel vorwirft.

> "Es steht dir nicht zu, Kepler, die erhabenen Manen des verehrungswürdigen Alten zu beleidigen, und unter Berufung auf Namen und Autorität des Archimedes im 20. Theorem Deines Supplements zur Archimedischen Stereometrie etwas, was noch gar nicht bewiesen ist, zum Beweis heranzuziehen. Als ob Archimedes jemals verlangt hätte, dass ein Kreis in ein Dreieck ausgewickelt werde, wozu Du Dich für berechtigt hältst, wenn Du Deine Äpfel in Zylindersegmente auswickelst. Welcher Verstand könnte derartige Metamorphosen fassen? Wohl hat Archimedes eine gerade Linie postuliert, die dem Umfang des Kreises gleich sein sollte [...]. Mit demselben Recht soll Dir daher gestattet zu sein zu verlangen: Gegeben sei ein Zylindersegment, dessen Grundfläche gleich dem Kreisabschnitt ist, der durch seine Rotation den Apfel erzeugte und dessen grösste Höhe der Umfang des grössten Kreises auf der Oberfläche des Apfels ist, um endlich das Segment auf Grund des zugestandenen Postulats nach Archimedischer Methode als inhaltsgleich mit Deinem Apfel zu erweisen. Dass aber Archimedes nie etwas Ähnliches [wie Du] gedacht hat, das beweist das mühsame Ein- und Umbeschreiben von Polygonen dem Kreis, von Polyedern der Kugel. [...] Aber dasselbe [die Bestimmung des Verhältnis der Kugel zu einem bestimmten Kegel] hat Archimedes auf weit mühevollerem Weg und mit wissenschaftlicheren Prinzipien verfolgt, als Deine Verwandlung von Figuren ineinander eines ist. Deshalb ist die von Dir verwendete Transformation Archimedischem Geist fremd." [Übersetzung Hammer 1955, S. 493]

6 Stereometrie des österreichischen Fasses

Im zweiten Hauptteil der *Nova Stereometria* über die "österreichischen Weinfässer im Speziellen" kehrt Kepler zur Frage nach der Gültigkeit der Visierung mittels einer kubischen Rute zurück, der Frage, "wie dieselbe Länge *AF* verschiedenen Fassfiguren zukommen kann, die doch nicht denselben Inhalt haben." [KGW Bd. IX, S. 74 (Kepler 1908, S. 47)]

Dabei verzichtet er auf die am Rande der Berechenbarkeit liegenden Näherungsformen aus dem vorangegangenen Kapitel; statt Zitronenstümpfe verwendet er nun doppelte Kegelstümpfe oder gar bloss einfache Zylinder für seine Überlegungen.



FIGUR 6-1 Näherung des österreichischen Weinfasses durch den doppelten Kegelstumpf [KGW Bd. IX, S. 73 (Schema XVIII)]

> "Das österreichische Fass hat nämlich die Form eines bauchigen Zylinders, oder, genauer gesprochen, man kann es sich zusammengesetzt denken aus zwei abgestumpften Kegeln, deren nach entgegengesetzten Richtungen weisende Scheite durch die hölzernen Fussböden abgeschnitten sind, und deren

[26] *Vindiciae Archimedis sive Elenchus Cyclometriae Novae a Philippo Lansbergio nuper editae*, Paris 1616.

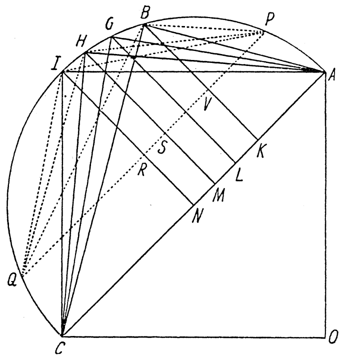
gemeinsame Basis, die Trennungsfläche beider Kegel, der grösste Kreis längs des Bauches des Fasses ist.” [KGW Bd. IX, S. 72 (Kepler 1908, S. 45)]

Kepler beginnt nicht räumlich, sondern mit der zum Zylindervolumen analogen Fragestellung in der Ebene: Wie verhalten sich die Flächen aller Rechtecke mit vorgegebener Diagonale zueinander? Die Antwort formuliert er als Theorem:

“Lehrsatz I. Die Achsenschnitte gerader Zylinder, die gleiche Diagonale haben, sind von ungleichem Flächeninhalt, ausser wenn bei ihnen das Verhältnis des Durchmessers zur Höhe dasselbe oder das umgekehrte ist; unter ihnen ist der Schnitt jenes Zylinders am grössten, dessen Höhe dem Durchmesser gleich sei.” [KGW Bd. IX, S. 74 (Kepler 1908, S. 47f)]

Aus der Darstellung der Schar der Rechtecke zu einer fest vorgegebenen Diagonale erkennen wir, dass der Flächeninhalt vom Verhältnis des Fassdurchmessers *CI* zur Fasshöhe *IA* abhängt. Kepler formalisiert diese Beobachtung wiefolgt: Die Flächeninhalte der Dreiecke über *AC* verhalten sich zueinander wie die Verhältnisse ihrer Höhen senkrecht auf *AC*. Diese Höhe fällt aber vom Mittelpunkt *N* gegen den Rand zu streng monoton ab. Daraus folgt die Maximalität für *CI=IA*..

FIGUR 6-2 Die Schar der Rechtecke mit vorgegebener Diagonale *AC* [KGW Bd. IX, S. 74 (Schema XIX)]

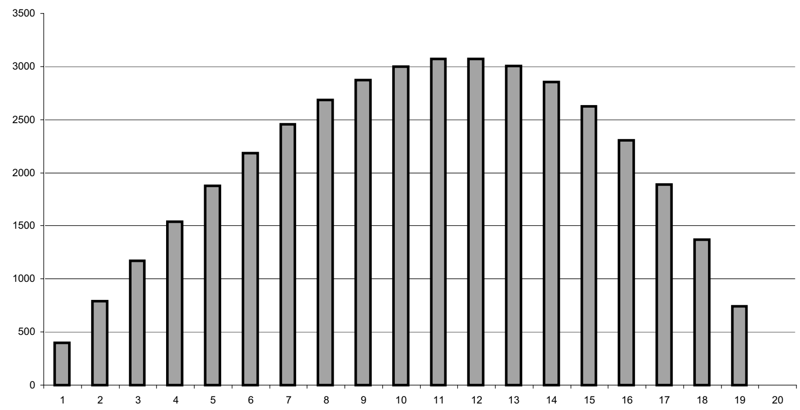


Da das Fassvolumen linear von der Höhe, vom Durchmesser aber quadratisch abhängt, scheitert der vorschnelle Schluss von der Maximalität der Achsenschnittfläche auf die Maximalität des Volumens.

“Ich will den Fehler nicht verhehlen, in den mich am ersten Tage die flüchtige Betrachtung dieses Satzes verfallen liess. [...] Denn nicht der Zylinder, der den grössten Achsenschnitt hat, hat auch den grössten Rauminhalt.” [KGW Bd. IX, S. 75 (Kepler 1908, S. 49)]

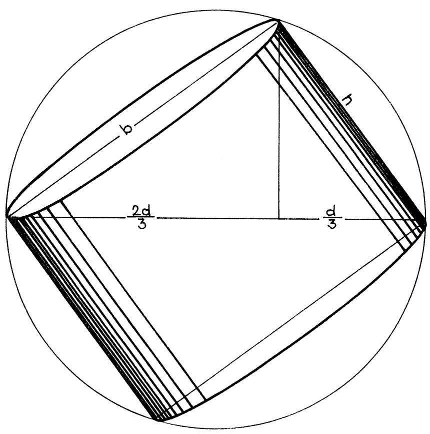
Die Fehlerhaftigkeit der vorschnellen Übertragung von der Ebene in den Raum zeigt Kepler auch anhand eines Zahlenbeispiels, aus dem hervorgeht, dass das maximale Volumen bei einem Verhältnis von Durchmesser zu Höhe zwischen 17:11 und 16:12 zu finden ist..

FIGUR 6-3 Abhängigkeit des Volumens von der Grundfläche bei fester Diagonale in Abhängigkeit der Höhe (Grafische Darstellung der Zahlenwerte [KGW Bd. IX, S. 78])



Nach Überlegungen zur Maximalität von in den Kreis einbeschriebenen Polyedern formuliert Kepler das Verhältnis von Durchmesser zu Höhe, bei dem unter allen zylindrischen Fässern zu einer vorgegebenen Diagonale - das sind die Zylinder, die einer fixen Kugel einbeschrieben sind - das maximale Volumen angenommen wird.

FIGUR 6-4 Der inhaltsgrösste Zylinder in der Kugel [Hofmann 1973, S. 282 (Figur 18)]



> "Lehrsatz V. Unter allen Zylindern mit gleichen Diagonalen ist derjenige der grösste, dessen Basisdurchmesser sich zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}$ zu 1, [...]." [KGW Bd. IX, S. 82 (Kepler 1908, S. 57)]

Jetzt folgen zwei erstaunliche Beobachtungen:

> "Folgesatz 1. Zylindrische Fässer ohne Bauch, die entweder höher oder niedriger sind als die österreichischen Fässer, fassen weniger als diese.
> Folgesatz 2. Daraus geht hervor, dass ein gewisser praktischer geometrischer Sinn in der Regel

liegt, nach der die österreichischen Böttcher die Fässer bauen[27], wenn sie den dritten Teil der Länge der Dauben als Halbmesser des Bodens annehmen. Dadurch wird nämlich erreicht, dass der Zylinder, den man sich zwischen den beiden Böden denken kann, zwei Bedingungen möglichst erfüllt, dass er nämlich mit der Regel des Lehrsatzes V übereinstimmt und den möglichst grössten Inhalt besitzt, obgleich er von der vollständigen Erfüllung der Regel abweicht. Andere Gestaltungen, welche bis zu den Punkten sehr nahe bei *G* diesseits und jenseits sich erstrecken, ändern nur wenig an dem Rauminhalt, weil dieser für *AGC* der grösstmöglich ist: das einem grössten Wert auf beiden Seiten Benachbarte zeigt nämlich am Anfang nur unmerkliche Abnahme." [KGW Bd. IX, S. 84f (Kepler 1908, S. 60)]

Bei der Beobachtung, dass die Änderung in der Nähe des Maximums am kleinsten wird, modern gesprochen also die Ableitung der Funktion gegen 0 geht, hat Kepler eine wichtige Eigenschaft der Maxima erkannt.

"Beiderseits eines Grösstwertes sei die Abnahme zunächst kaum merkbar. Sie wird an anderen Stellen ergänzt durch den Hinweis, dies sei ähnlich beim Kreis. Ersichtlich sind diese Äusserungen auf die oben erwähnte numerische Überlegung gestützt und lassen erkennen, dass Kepler richtige Vorstellungen vom Funktionsverlauf an Extremstellen mit $y'' < 0$ (Maxima) hat." [Hofmann 1973, S. 282]

Wie konnten die Böttcher auf die Vorzüge der von ihnen ausgewählten Fassform gestossen sein? Kepler weiss, dass nicht Rechnung dahinterstehen kann [KGW Bd. IX, S. 85]. Deshalb appelliert er an eine praktische Intuition und Ästhetik, die nicht auf der Logik fusst und schreibt voll Begeisterung für die von ihm aufgedeckten Zusammenhänge:

"Wer wollte in Abrede stellen, dass die Natur mit Hilfe eines dunklen Gefühls auch ohne Vernunftschlüsse die Menschen Geometrie lehrt, da die Böttcher nur nach dem Augenmass und aus Schönheitsrücksichten in der Fasshälfte die grösstmögliche Figur herzustellen gelernt haben? Es trete ein Geometer auf und lehre eine leichtere Methode, ein Fass zu konstruieren, das in seiner Hälfte dem Zylinder vom grössten Inhalt näher kommt, als es diejenige ist, die die österreichischen Binder von altersher anwenden, nämlich die Methode der 'proportio sesquialtera', und er gebe eine zur Messung geeignetere Form an als die in Österreich gebräuchliche." [KGW Bd. IX, S. 85 (Kepler 1908, S. 61)]

In diesem Sinne hat das österreichische Fass "under allen anderen den artigisten Schick", wie Kepler dies auf dem Titelblatt der *Messekunst Archimedis* formulierte.

Bei der speziellen Bauart des österreichischen Fasses, so Keplers weitere Überlegungen, funktioniert die Visierung mit der kubischen Rute. Bei Fässer von ähnlicher Form ist der Inhalt zum kubischen Verhältnis der Längen *AZ* proportional [KGW Bd. IX, S. 115]. Da weiter das Volumen bei den österreichischen Fässern in der Nähe des Maximums liegt, haben kleine Änderungen in der Bauform kaum merkliche Auswirkungen auf den Inhalt [KGW Bd. IX, S. 117].

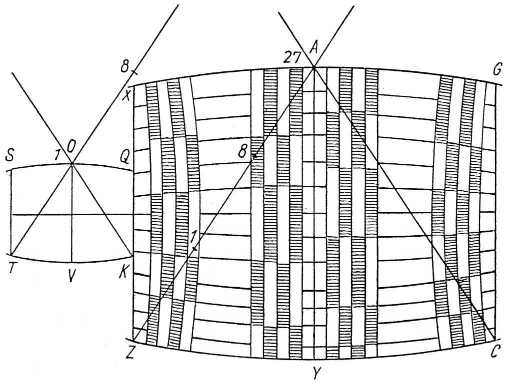
Kepler kann deshalb zu Anfang des dritten Teils über die "Anwendung der in der Stereometrie aufgestellten Regeln" die seinem Werk als Ausgangspunkt dienende Fragestellung nach der Richtigkeit der Visierung mit der kubischen Rute beantworten.

"Wenn ein Fass entsprechend den in Österreich gebräuchlichen Regeln gebaut ist, so kann man sich auf die Angaben der kubischen Visierrute vollkommen verlassen. Diese Methode der Ausmes-

[27] Die volle Werkstattregel gibt Kepler in §75 der *Messekunst* [KGW Bd. IX, S. 210] an.

> sung ist zugleich die einfachste, weil durch sie tatsächlich der Hohlraum des Fasses gefunden wird, [...]” [KGW Bd. IX, S. 119 (Kepler 1908, S. 94)]

FIGUR 6-5 Visierung mit der kubischen Rute [KGW Bd. IX, S. 115 (Schema XXII)]



Um die heimlichen Umtriebe seines eigenen Nachwuchses wissend, fällt Kepler sofort eine neue Problemstellung für die Fassrechnung ein.

> “Methode, das Verhältnis des geleerten Teils zum Rest zu bestimmen, wenn das Fass liegt und die Durchmeser des Bauches und der Böden lotrecht stehen.
>
> Soweit mir bekannt, ist diese Untersuchung bisher noch ausstehend, die doch auch für Familienväter zur Entdeckung und Verhütung von Diebstählen nötig ist, wenn schon Bacchus seine Schätze aus dem Bereich der Thetis brachte und ihr den Zutritt verbot; [...]” [KGW Bd. IX, S. 128 (Kepler 1908, S. 95)]

Eine für die Praxis brauchbare Lösung findet er aber erst in §88 der *Messekunst*, wo in einer Marginalie die selbstkritische Äusserung steht: “Anderer weg im Lateinischen Tractat noch nicht richtig” [KGW Bd. IX, S. 237].

7 Schluss

Zum Schluss der *Nova Stereometria* formuliert Kepler nochmal, mit welchem Ziel und Anspruch er die Schrift verfasst hat.

> “Ich habe mir vorgenommen, die Irrtümer anderer in der Bestimmung des Inhalts eines ganz oder teilweise gefüllten Fasses aufzudecken und die Grundlagen der Berechnung in den Lehrsätzen dieses Buches darzustellen. Da aber die Wahrheit sich durchsetzt, auch wenn sie schweigt im Lärm der Irrtümer, und da das Buch, das anfangs kaum zehn Sätze umfasste, über die Massen angewachsen ist, so möge, wer daran seine Freude hat, an seinen Fehlern festhalten; wir wollen die erlangten Vorteile verwenden und beten, dass uns unsere geistigen und leiblichen Güter erhalten bleiben, und der trinkbare Stoff in reichlicher Menge vorhanden sein möge.” [KGW Bd. IX, S. 133 (Kepler 1908, S. 98)]

Die *Nova Stereometria* ist also nicht das fehlerfreie, abschliessende Werk zur Volumenbestimmung der Fässer, sondern ein Einblick in die Werkstatt des “working mathematician”, dem eine Fragestellung aus dem Alltag Anlass bot, Probleme der Geometrie aufzustellen, die mit den damals bekannten Methoden nicht zu lösen waren. Kepler erkannte bei der Vor-

bereitung für den Druck und der Übertragung ins Deutsche die Unvollständigkeit seines Werks und einige der Fehler, die auf vorschnelle Verallgemeinerungen, falsche Analogieschlüsse oder langwierige Rechnungen zurückzuführen sind.

Das eigentliche Zielpublikum der Schrift, die Fassbauer und Visierer, hat Kepler aufgrund der Schwierigkeit seiner mathematischen Überlegungen mit grosser Sicherheit verfehlt. Dennoch wurde sein Umgang mit dem Unendlichen und der neue Blick auf Extremalprobleme zu zwei wichtigen Ausgangspunkten für die grosse Zahl mathematischer Neuerungen, die gegen Ende des 17. Jahrhunderts zu einer Geometrie führten, die eine ganz andere als die der antiken Geometer war, deren Ergebnisse für eine Vielzahl von Keplers Fachkollegen immer noch die Grenzen dessen markierten, was für den menschlichem Verstand überhaupt zu erkennen ist.

8 Bibliographie

Aiton, Eric J. 1973. Infinitesimals and the area law. In: *Internationales Kepler-Symposium: Weil der Stadt 1971*. Hrsg. von Fritz Krafft, Karl Meyer und Berhard Sticker. S. 284-305. Hildesheim.

Archimedes. 1967. *Werke*. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Arthur Czwalina. Darmstadt.

Baron, Margaret E. 1969. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford.

Bulmer-Thomas, Ivor. 1984. Guldin's Theorem - or Pappus's? In: *ISIS* 75, S. 348-352.

Folkerts, Menso. 1974. Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit. In: *Humanismus und Technik* 18, S. 1-41.

Hammer, Franz. 1955. Nachbericht. In: Johannes Kepler, *Gesammelte Werke.* Hrsg. von Franz Hammer. Bd. IX Mathematische Schriften, S. 427-457. München.

Hofmann, Joseph Ehrenfried. 1973. Über einige fachliche Beiträge Keplers zur Mathematik. In: *Internationales Kepler-Symposium: Weil der Stadt 1971*. Hrsg. von Fritz Krafft, Karl Meyer und Berhard Sticker. S. 261-284. Hildesheim.

Kepler, Johannes. 1615. Nova Stereometria Doliorum Vinariorum. In: Johannes Kepler, *Gesammelte Werke.* Hrsg. von Franz Hammer. Bd. IX Mathematische Schriften, S. 5-133. München, 1955.

Kepler, Johannes. 1616. Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedis. In: Johannes Kepler, *Gesammelte Werke.* Hrsg. von Franz Hammer. Bd. IX Mathematische Schriften, S. 135-274. München, 1955.

Kepler, Johannes. 1908. *Neue Stereometrie der Fässer.* Übersetzt und herausgegeben von R. Klug. Leipzig.

Kepler, Johannes. 1971. *Selbstzeugnisse.* Ausgewählt und eingeleitet von Franz Hammer, übersetzt von Ester Hammer, erläutert von Friedrich Seck. Stuttgart.

Knorr, Wilbur R. 1982. Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity. In: *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought.* Hrsg. von Norman Kretzmann. S. 112-145. Ithaca.

List, Martha; Bialas, Volker. 1973. *Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler: Ein Beitrag zur frühen Algebra.* München.

Mancosu, Paolo. 1996. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* New York.

Mass, Zahl und Gewicht: Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. 1989. Hrsg. von M. Folkerts, E. Knobloch, K. Reich. Wolfenbüttel.

Struik, Dirk. 1969. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge.