

PS Von Kant zu Hilbert
WS 1997/98, Prof. E. Knobloch

Georg Cantor
Grundlagen einer allgemeinen
Mannigfaltigkeitslehre

Daniel Burckhardt, 180979
daniel.burckhardt@usa.net
9. Dezember 1998

Inhaltsverzeichnis

<i>1</i>	<i>Einführung</i>	<i>1</i>
<i>2</i>	<i>Biographische Angaben</i>	<i>2</i>
<i>3</i>	<i>Der Weg zur Mengenlehre</i>	<i>5</i>
<i>4</i>	<i>Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre</i>	<i>6</i>
4.1	Der Mengen-Begriff	6
4.2	Die Einführung irrationaler Zahlen	7
4.3	Mächtigkeit der reellen Zahlen	8
4.4	Der Streit mit Kronecker	10
4.5	Das Kontinuum	12
4.6	Transfinite Ordinalzahlen	13
4.7	Das Eigentlich-Unendliche: Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit	14
<i>5</i>	<i>Schlussbetrachtungen</i>	<i>16</i>

1 Einführung

Georg Cantors „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“¹ bilden den fünften Teil einer Serie von sechs Artikeln², die unter dem gemeinsamen Titel „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ zwischen 1879 und 1884 in den *Mathematischen Annalen* abgedruckt wurden.³ Innerhalb dieser Serie gebührt den „Grundlagen“ eine besondere Stellung: Sie sind als geschlossene Darstellung derjenigen Ergebnisse konzipiert, die den Kern der zwischen 1871 und 1884 geschaffenen *Cantorsche Mengenlehre* bilden. 1883, also noch vor ihrer Publikation in den *Annalen*, wurden sie – um den Untertitel „Ein mathematisch-philosophischer Versuch in die Lehre des Unendlichen“ und ein Vorwort erweitert – als Separatdruck bei Teubner herausgegeben.

Dazu Cantor (im in der Gesamtausgabe seiner Werke nicht abgedruckten Vorwort): „Since the present essay carries the subject much further, and since its main thesis is independent of the earlier articles, I decided to publish it separately under a title that corresponds more closely to its contents.“⁴ Ausdrücklich wendet er sich dabei an ein doppeltes Publikum, den mit den aktuellen mathematischen Entwicklungen vertrauten Philosophen, sowie den philosophisch vorgebildeten Mathematiker.

Der folgende Abschnitt liefert einige Angaben über die bewegte Biographie von Georg Cantor. Im Anschluss daran betrachte ich den Gang der Arbeiten, die den jungen Privatdozenten zu den ersten Arbeiten über die Mengenlehre führt. Abschnitt 4 konzentriert sich auf die „Grundlagen“. Sie dienen mir als Ausgangspunkt zur Untersuchung wichtiger Punkte in Cantors Werk: Mengenlehre, die Grundlegung der reellen Zahlen, transfinite Größen sowie philosophische Betrachtungen der Mathematik.

¹ In den Originalen findet sich die Schreibweise ‚Mannigfaltichfaltigkeit‘. Ich halte mich an die angepasste Orthographie der Cantor-Gesamtausgabe: Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Herausgegeben von Ernst Zermelo. Reprint, ergänzt um eine Bibliographie weiterer Arbeiten des Autors, Berlin 1980.

² Einen siebten und letzten Teil, welcher im wesentlichen feststünde, kündigte Cantor in einem Brief vom 26. 11. 1883 an Felix Klein an. (Purkert Walter; Ilgauds, Hans Joachim: *Georg Cantor: 1845-1918*. Basel, 1987. Hier S. 191). Vermutlich verhinderte der Krankheitsausbruch im Jahre 1884 die Fertigstellung.

³ Cantor 1980, S. 165-209.

⁴ Zitiert nach Cantor, Georg: *Foundations of a general theory of manifolds: A mathematico-philosophical investigation into the theory of the infinite*. In: Ewald, William (Hg.) *From Kant to Hilbert: A source book into the foundation of mathematics*. Oxford 1996, S. 878-920. Hier S. 881.

2 Biographische Angaben

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor wurde am 19. Februar alten Stils (3. März n. St.) 1845 in St. Petersburg geboren.⁵ Sein Vater Georg Woldemar Cantor arbeitete dort als erfolgreicher Makler.⁶ Nach dem Rückzug von den Geschäften aufgrund eines Lungenleidens, übersiedelte die Familie im Jahre 1856 nach Frankfurt am Main.

Georg besuchte kurzzeitig Privatschulen in Frankfurt und das Gymnasium in Wiesbaden. Im Hinblick auf ein Ingenieurstudium trat er Ostern 1859 in die Realschule in Darmstadt ein. Im folgenden Jahr wechselte er an die damit verbundene „Höhere Gewerbeschule des Grossherzogtums Hessen“. Nachdem Cantor die Einwilligung seines Vaters zum Mathematikstudium erhalten hatte, legte er im Sommer 1862, zusätzlich zum Abschluss der allgemeinen Klassen, die dafür notwendige Reifeprüfung mit sehr gutem Ergebnis ab.

Im Herbst 1862 immatrikulierte er sich an der Universität Zürich. Die zu jener Zeit die Mathematik vertretenden Professoren Carl Heinrich Graeffe⁷ und Johann Wolfgang Deschwanden traten nicht durch besondere Ergebnisse in der aktuellen Forschung hervor, galten jedoch als gute Lehrer.

Aufgrund des Todes seines Vaters unterbrach Cantor im Frühsommer 63 sein Studium für ein Semester. Nach der Übersiedelung mit seiner Mutter nach Berlin trat er im Wintersemester 63/64 in die dortige „Friedrich-Wilhelms-Universität“ ein. Diese war mit Professoren wie Karl Weierstrass, Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker eines *der* grossen Zentren der Mathematik. „Zu Weierstrass kamen die Zuhörer aus aller Herren Länder, weil er gerade das brachte, was noch in keinem Lehrbuch und in keiner Fachzeitschrift stand.“⁸

Cantor hörte Mathematikvorlesungen bei Friedrich Arndt, Kronecker, Kummer und Weierstrass, Physik bei Heinrich Wilhelm Dove und Heinrich Gustav Magnus sowie Philosophie bei Adolf Trendelenburg. 1866 weilte er für ein Semester in Göttingen.

1867 promovierte er unter dem Titel „De aequationibus secundi gradus indeterminatis“ über ein Problem aus der Zahlentheorie. Nach dem Abschluss in Mathematik legte Cantor zusätzlich die

⁵ Fraenkel, Adolf: Das Leben Georg Cantors. In: Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Reprint, ergänzt um eine Bibliographie weiterer Arbeiten des Autors, Berlin 1980, S. 452-483. Hier S. 452.

⁶ Sofern keine andere Referenz angegeben ist, folge ich in diesem Abschnitt der Biographie von Purkert, Ilgauds.

⁷ Kommunikation von J. J. Burckhardt vom 9.7. 1998: „C. H. Graeffe ist jetzt noch bekannt dank seines Verfahrens zur Auflösung algebraischer Gleichungen: ‚Graeffesches Verfahren‘ in jeder Abhandlung zur Algebraischen Lösung, angewandte Mathematik, auch von mir in Übungen vorgeführt.“

⁸ Purkert, Ilgauds, S. 22.

Staatsprüfung für das höhere Lehramt ab und unterrichtete mit gemischtem Erfolg für kurze Zeit am Königlichen Friedrich-Wilhelms Gymnasium.⁹

In Halle an der Saale bot sich dem jungen Cantor, vermutlich durch den Einsatz des nach Zürich berufenen Studienfreundes Hermann Amandus Schwarz, im Frühjahr 1869 die Möglichkeit zur Habilitation und einer Position als Privatdozent. Die Thema der Habilitationsschrift entstammte wiederum der Zahlentheorie und behandelte invariante Transformationen einer speziellen quadratischen Form. Die Universität Halle, im 18. Jahrhundert noch Zentrum der deutschen Aufklärung, hatte zu jener Zeit ihre Blüte überschritten und galt bloss noch als preussische Provinzuniversität von lokaler Bedeutung. Durch den Ordinarius für Mathematik, Eduard Heine, erhielt Cantor jedoch entscheidende Impulse für den weiteren Gang seiner Forschungen.

Cantor sollte für den Rest seines Lebens in Halle bleiben, auch wenn er sich dort zeitweilig schlecht behandelt fühlte und seine relative Isolation gegenüber den grossen Forschungszentren Berlin und Göttingen gern durchbrochen hätte. So schrieb er am 8. März 1874 an Richard Dedekind: „Nachdem ich heute meine Vorlesungen geschlossen, denke ich nächster Tage nach Berlin zu gehen; in den Ferien habe ich es bis jetzt nie lange hierselbst ausgehalten, denn das einzige, was mich an Halle seit 5 Jahren gewissermassen bindet, ist der einmal gewählte Universitätsberuf.“¹⁰ Erst nach einer Rücktrittsdrohung wurde ihm für sein Extraordinariat auch ein Gehalt gewährt. 1875 bewarb sich Cantor um ein in Berlin frei gewordenes Extraordinariat. Von der Fakultätskommission gemeinsam mit Heinrich Bruns an erste Stelle gesetzt, übergang ihn das zuständige Ministerium aus nicht näher bekannten Gründen.¹¹ 1879 wurde Cantor Ordinarius in Halle, wo er, mit krankheitsbedingten Unterbrechungen, bis zu seinem Rücktritt 1913 unterrichtete.

Im Sommer 1874 heiratete Cantor Vally Guttmann. Auf ihrer Hochzeitsreise trafen die beiden in Interlaken mit Dedekind zusammen, den Cantor zwei Jahre zuvor bei einer früheren Reise in die Schweiz kennengelernt hatte und mit dem er seither in Briefwechsel stand.

Die dreizehn Jahre zwischen 1871 und 1884 charakterisierte Adolf Fraenkel als Cantors „Zeit der schöpferischen Höchstleistung“. In diese Periode fallen die entscheidenden Entdeckungen und Veröffentlichungen zur Mengenlehre. Abrupt beendet wurde sie durch die erstmalige psychische Erkrankung Cantors im Frühsommer 1884. Gestützt auf spätere Krankheitsberichte, gehen Purkert und Ilgauts von einer manischen Depression aus, ein Leiden, das nicht primär durch äussere Umstände verursacht wird.¹² Plötzliche Krankheitsschübe, berichtet wird von „gesteigerter Erregbar-

⁹ ebda., S. 26-27.

¹⁰ Zitiert nach Purkert, Ilgauts, S. 53.

¹¹ Purkert, Ilgauts, S. 53-55.

¹² ebda, S. 79.

keit“ und „Schrecknissen aller Art“¹³, gefolgt von längeren depressiven Phasen, traten auch später wiederholt auf und erforderten die zeitweilige Behandlung in Sanatorien oder der Universitätsklinik. Cantors psychische Lage wie auch die Enttäuschung über die Zurückweisung einer Arbeit über Ordnungstypen durch seinen Freund Gösta Mittag-Leffler führten ihn zur verstärkten Beschäftigung mit nichtmathematischen Themen. Eines davon lief unter dem Namen ‚Bacon-Shakespeare-Theorie‘ und besagte, dass sich hinter Shakespeare als wahrer Autor Francis Bacon verberge. Statt Cantor für sein heftiges Eintreten für diese Meinung zu pathologisieren, ist es mir eher Zeichen für seine breiten Interessen über die Mathematik hinaus, in Musik, Literatur, Philosophie und Theologie. Schoenflies schreibt: „Ihm selbst lag alles [Allgemeine Mengenlehre, transfinite Zahlen, Philosophie] in gleicher Weise am Herzen, wie er überhaupt allen seinen Ideen, mit Einschluss der nichtmathematischen, mit gleicher Liebe ergeben war.“¹⁴

Cantor blieb, wenn auch in vermindertem Masse, mathematisch weiterhin produktiv. Den Abschluss seiner fachlichen Publikationen bilden die 1895 und 97 in den *Annalen* erschienenen „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. In diesen ist zu beobachten, wie Cantors Interesse, wohl auch unter dem Einfluss Dedekinds, von der Mengenlehre vermehrt auf die Grundlegung des Zahlbegriffs überging.¹⁵

Um den übermächtigen Einfluss einzelner Gelehrter – wie er ihn selbst bei Kronecker erlebte – zu beschränken, betrieb Cantor den Zusammenschluss der deutschen Mathematiker, die 1890 in der Gründung der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (DMV) gipfelte. Cantor selbst wurde anlässlich der ersten Versammlung zum Vorsitzenden der Vereinigung gewählt. In den 90er Jahren konnte Cantor auch erleben, wie die Mengenlehre von einer jüngeren Generation - Hilbert, Hurwitz, Minkowski in Deutschland, Poincaré, Borel, Baire und Lebesgue in Frankreich - in ihrer Bedeutung langsam erkannt und aufgenommen wurde.

Den endgültigen Durchbruch seiner Gedanken illustriert eine Grussnote der DMV zum 70. Geburtstag am 3. März 1915, gerichtet an den „Schöpfer der Mengenlehre, der dem Begriff des Unendlichen einen klaren Sinn gegeben und mit neuartigen, tiefen und weitausgreifenden Gedanken alle Gebiete der Mathematik befruchtet hat“¹⁶. Kurz darauf erkrankte Cantor erneut und musste die Universitätsnervenklinik von Halle aufsuchen, wo er am 6. Januar 1918 verstarb.

¹³ Zitiert nach Purkert, Ilgauds, S. 80.

¹⁴ Schoenflies, Arthur: Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. *Acta mathematica*, 50 (1927), S. 1-23. Hier S. 3.

¹⁵ Fraenkel, S. 468f.

¹⁶ Zitiert nach Purkert, Ilgauds, S. 166.

3 Der Weg zur Mengenlehre

Die dritte These, die Cantor anlässlich seiner Promotion verteidigte, lautete „In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi“ (In der Mathematik ist die Kunst der Fragestellung wichtiger als die der Lösung).¹⁷ Für den jungen Cantor wurde eine Fragestellung bedeutend, die Eduard Heine an ihn herantrug: „Falls sich eine vorgegebene, beliebige Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellen lässt, ist diese Darstellung dann eindeutig?“¹⁸ Im brieflichen Austausch mit Schwarz fanden die beiden einen Beweis, den Cantor 1870 im Crelleschen Journal publizieren konnte.¹⁹ In einer späteren Notiz zu dieser Arbeit zeigte Cantor, wie mit einem auf Heine zurückgehenden Verfahren die Konvergenzforderung auf alle ausser endlich viele Punkte abgeschwächt werden kann.²⁰

Das Problem beschäftigte Cantor weiterhin: Unter Einfluss einer Arbeit Hermann Hankels publizierte er 1872 in den Annalen „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ mit dem Ergebnis, dass „für eine *unendliche* Anzahl von Werten des x im Intervalle $(0 \dots 2\pi)$ auf die Konvergenz oder die Übereinstimmung der Reihensumme verzichtet wird, ohne dass die Gültigkeit des Satzes aufhört.“²¹

In derselben Arbeit finden sich zwei für Cantor immer wichtiger werdende Themen:

- Die exakte Einführung der reellen Zahlen und die daran anknüpfende Untersuchung des Verhältnisses der reellen zu den rationalen Zahlen führt ihn zum Begriff der *Mächtigkeit* einer Punktmenge;
- *Ableitungen* von Punktmenge, definiert durch Übergang zur Menge ihrer Häufungspunkte, bilden ein Modell für Cantors transfinite Ordnungszahlen.²²

¹⁷ Zitiert nach Purkert, Ilgands, S. 25f.

¹⁸ Dauben, Joseph W.: The Development of Cantorian Set Theory. In: Grattan-Guinness, Ivor (Hg.), From the Calculus to Set Theory, 1630-1910: An Introductory History. London, 1980, S. 181-219. Hier S. 182.

¹⁹ Purkert, Ilgands, S. 34f.

²⁰ Cantor 1980, S. 85: „Hat man *eine für jeden Wert* von x gültige, d. h. konvergente Darstellung des Wertes Null durch diese trigonometrische Reihe (1) $[0 = C_0 + C_1 + C_2 + \dots$ mit $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx]$, so sind die Koeffizienten c_n, d_n dieser Darstellung gleich Null.‘ Es lassen sich nun hierbei Voraussetzungen in dem Sinne modifizieren, dass man für gewisse Werte von x entweder die Darstellung der Null durch (1) oder die Konvergenz der Reihe aufgibt.“

²¹ Cantor 1980, S. 92.

²² ebda, S. 98.

Für eine Punktmenge P wird die n -te *Ableitung* $P^{(n)}$ iterativ als Menge der Häufungspunkte von $P^{(n-1)}$ definiert.

Cantor geht hier für n noch selbstverständlich von positiven ganzen Zahlen aus; der unten beschriebene Grenzübergang von $P^{(n)}$ zu $P^{(\omega)}$ fehlt hier noch. Deshalb halte ich Zermelos Anmerkung zu dieser Stelle für verfrüht: „Seine [Punktmenge] weitere Ausdehnung über jeden endlichen Index a hinaus hat den Forscher dann mit innerer Notwendigkeit zur Begriffsschöpfung

Ihr Zusammenwirken wird zum Kern der Artikelsreihe „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“, nach Zermelo „die Quintessenz des Cantorschen Lebenswerkes, so dass ihr gegenüber alle seine sonstigen Abhandlungen nur als Vorläufer oder Ergänzungen erscheinen“²³:

4 Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre

4.1 Der Mengen-Begriff

Der von Cantor gewählte Titel „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ weist immer noch auf die Untersuchung von Punktmengen als Untermengen der Zahlenachse oder des Raumes hin. Dass sich dahinter ein allgemeineres Konzept verbirgt, wird in der Anmerkung zum Begriff ‚Mannigfaltigkeitslehre‘ erläutert: „Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speziellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer ‚Mannigfaltigkeit‘ oder ‚Menge‘ verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, [...]“²⁴

Cantor verweist in den „Grundlagen“ explizit auf Bernhard Bolzanos Schrift „Paradoxien des Unendlichen“²⁵. In einem weiter unten zitierten Brief an Dedekind benutzt er den Ausdruck ‚Inbegriff der Individuen‘. Deshalb vermute ich, dass Cantor den Begriff ‚Menge‘ von Bolzano übernommen hat: „Es gibt Inbegriffe, die, obgleich dieselben Teile $A, B, C, D \dots$ enthaltend, doch nach dem Gesichtspunkte (Begriffe), unter dem wir sie eben auffassen, sich als *verschieden* (wir nennen es wesentlich verschieden) darstellen, z.B. ein ganzes und ein in Stücke zerbrochenes Glas als Trinkgefäß betrachtet. [...] Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgültig ist (an dem sich also nichts für uns wesentliches ändert, wenn sich bloss diese ändert), nenne ich eine *Menge*.“²⁶

Klassisch wurde jene Definition, die Cantor 1895 an den Anfang seiner „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ stellte:

‚transfiniten‘ Ordnungszahlen $w, w+1, \dots, w^2, \dots$ geführt. In diesem Begriffe der ‚höheren Ableitungen‘ einer Punktmenge haben wir somit den eigentlichen Keimpunkt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen ‚Mengenlehre‘ zu erblicken.“ (ebda, S. 102)

²³ Cantor 1980, S. 246.

²⁴ ebda, S. 204.

²⁵ ebda, S. 179.

²⁶ Zitiert nach Spalt, Detlef D.: Die mathematischen und philosophischen Grundlagen des Weierstrassschen Zahlbegriffes zwischen Bolzano und Cantor. *Archive for History of Exact Sciences* 41(4) (1991), S. 311-362. Hier S. 350.

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus: $M = \{m\}$.“²⁷

4.2 Die Einführung irrationaler Zahlen

Für die oben erwähnten Arbeit „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ benötigte Cantor eine präzise Definition der reellen Zahlen, die er in zwei kurzen Paragraphen gleich mitlieferte.²⁸ Purkert und Ilgauds sehen in der heute unter dem Prinzip der Vervollständigung bekannte Methode eine „Theorie der reellen Zahlen, die allein hingereicht hätte, ihm einen Platz in der Geschichte der Mathematik zu sichern“²⁹.

Zur Identifikation der über Folgen definierten Zahlen mit dem geometrischen Kontinuum setzt Cantor ein Axiom, „welches einfach darin besteht, dass auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört [, ...]. Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.“³⁰

In §9 der „Grundlagen“ wiederholt Cantor diese Konstruktion der reellen Zahlen. Ausführlicher weist er die beiden weiteren – ihm bekannten – streng arithmetischen Einführungen von Weierstrass und Dedekind hin. Kommen ihm die Dedekindschen Schnitte „eigenartig“ vor, „[...] ist aber diese *dritte* [seine eigene], [...] Definitionsform die einfachste und natürlichste von allen, und man hat an ihr den Vorteil, dass sie sich dem analytischen Kalkül am unmittelbarsten anpasst.“³¹ Nennt Cantor an dieser Stelle für die Publikation seiner Konstruktion das Jahr 1871, auch wenn die Arbeit erst 1872 erschienen ist, so mag dies mit der Zeitspanne zwischen Einsendung der Arbeit und dem Publikationstermin erklärbar sein. Es fällt aber auf, dass so der zeitliche Vorrang zu den anderen erwähnten Publikationen von Kossak (Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872) und Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872)³² betont wird.

²⁷ Cantor 1980, S. 282.

²⁸ Cantor betrachtet Reihen von rationalen Zahlen mit der Eigenschaft, dass zu jedem positiven, rationalen ε ein n_1 existiert, so dass $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ für $n > n_1$ und m positiv, beliebig. Zwei Reihen dieser Form repräsentieren die gleiche Zahl, falls die Differenz ihrer Glieder beliebig klein wird. Addition und Subtraktion wird über Addition respektive Subtraktion der entsprechenden Reihen eingeführt.

²⁹ Purkert, Ilgauds, S. 36.

³⁰ Cantor 1980, S. 97.

³¹ ebda, S. 184.

³² Dedekinds Arbeit beruht auf Notizen vom November 1858; publiziert hat er sie allerdings erst, nachdem er im März 72 von Cantors Arbeit erfuhr (Dauben, Joseph W.: Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge 1979. Hier S. 48).

4.3 Mächtigkeit der reellen Zahlen

Im Jahre 1872, dem Jahr, in dem Cantor und Dedekind ihre Artikel über die Grundlegung der reellen Zahlen veröffentlicht hatten, trafen sich die beiden zufällig während des Urlaubs in der Schweiz.³³ Es mag Dedekinds Aussage „Die Gerade L ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als das Gebiet R der rationalen Zahlen an Zahlindividuen.“³⁴ gewesen sein, die Cantors Interesse an der Klärung des Verhältnisses zwischen den rationalen und reellen Zahlen weckte.

Cantor erkannte den Wert der *Mächtigkeit* für den Vergleich unendlicher Mengen³⁵, den er im §1 der „Grundlagen“ folgendermassen einführt: „Jeder wohldefinierten Menge kommt danach eine bestimmte Mächtigkeit zu, wobei zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben werden soll, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element einander zuordnen lassen.“³⁶

Hilfesuchend wendete er sich in einem Brief vom 29.11.1873 an den 14 Jahre älteren Dedekind:

„Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es, und sind so gut, mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlengrössen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) den (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen,

³³ Purkert, Ilgauts, S. 43.

³⁴ Dedekind, Richard: Gesammelte mathematische Werke. Herausgeben von Robert Fricke et al., 3 Bände, Braunschweig 1932. Hier Bd. 3, S. 321.

³⁵ Der Vergleich von unendlichen Mengen über ein-eindeutige Zuordnungen ist ein älteres Konzept. So schreibt Galilei im ersten Tag der „Discorsi“:

„But if I were to ask how many *roots* there are, it could not be denied that those are as numerous as all the numbers, because there is no number that is not the root of some square. That being the case, it must be said that square numbers are as numerous as all numbers, because they are as many as their roots, and all numbers are roots. Yet at the outset we said that all the numbers were many *more* than all the squares, the majority being non-squares. Indeed, the multitude of squares diminishes in ever-greater ratio as one moves on to greater numbers, for up to one hundred there are ten squares, which is to say that one-tenth are squares; in ten thousand, only one one-hundredth part are squares; in one million, only one one-thousandth. Yet in the infinite number, if one can conceive that, it must be said that that there are as many squares as all numbers together. [...] And in final conclusion, the attributes of equal, greater, and less have no place in infinite, but only in bounded quantities.“ (Galilei, Galileo: Two New Sciences, including Centers of Gravity & Force of Percussion. Translated, with Introduction and Notes, by Stillman Drake. Madison, 1974. Hier S. 40f.)

Ich nehme an, dass Cantors Mächtigkeitsbetrachtungen von Bernhard Bolzanos „schöner und gehaltreicher Schrift“ (Cantor 1980, S. 179) „Paradoxien des Unendlichen“ beeinflusst sind.

(x) aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher.“³⁷

Auch Dedekind konnte die obige Frage nicht beantworten, führte im Antwortschreiben jedoch einen Beweis für die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen. Nachdem Cantor wenig später einen Beweis für die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen fand (der auf Intervallschachtelungen und noch nicht auf dem nach ihm benannten Diagonalverfahren beruhte), publizierte er beide Resultate 1874 im Artikel „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.“ Dass Cantor Dedekinds Beweis ohne dessen Einwilligung oder eine entsprechende Referenz übernahm, belastete ihr Verhältnis und führte zu einer Pause im Briefwechsel, die Dedekind erst 1876 durchbrach.³⁸

Wiederum an Dedekind richtete Cantor seine nächste Frage im obigen Kontext: „Lässt sich eine Fläche [(. . .)] eindeutig auf eine Linie [(. . .)] eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört?“³⁹ Einen ersten, erstaunlich einfachen Beweis mittels Korrespondenz von Dezimalbruchentwicklungen, konnte Cantor am 20. Juni 1877 an Dedekind übermitteln; dieser erkannte eine Lücke darin, die von Julius König schnell geschlossen wurde. Bei der Publikation dieses Resultates im 1878er Artikel „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ scheint Cantor seinen früheren Fehler zu wiederholen: Ohne Referenz führt er die ihm durch Dedekind übermittelte Vermutung der Invarianz der Dimension unter einer *stetigen* Abbildung an⁴⁰; der Austausch zwischen den beiden bricht für die nächsten drei Jahre erneut fast vollständig ab.⁴¹

³⁶ Cantor 1980, S. 167.

³⁷ Zitiert nach Purkert, Ilgauds S. 45.

³⁸ Ferreirós, José: Cantor and Dedekind. *Historia Mathematica* 20 (1993), S. 343-363. Hier S. 349f.

³⁹ Brief Cantors an Dedekind vom 5. Januar 1874, zitiert nach Purkert, Ilgauds, S. 48.

⁴⁰ Dedekind an Cantor: „Ich glaube nun vorläufig an den folgenden Satz: Gelingt es, eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit A von a Dimensionen einerseits und den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit B von b Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese *Correspondenz selbst*, wenn a und b ungleich sind, nothwendig eine *durchweg unstetige*.“ (Zitiert nach Purkert, Ilgauds S. 50.)

Ein vollständiger Beweis dieses Satzes lieferte erst L. E. J. Brouwer im Jahre 1911.

⁴¹ Ferreirós, S. 351. Ferreirós sieht ein mögliches Motiv für Cantors Verhalten in den Spannungen zwischen Dedekind und Kronecker aufgrund einer Publikation über die Faktorisierung algebraischer Zahlen. Cantor habe sich nicht durch Nennung Dedekinds in Opposition zum in Berlin einflussreichen Kronecker stellen wollen (ebda., S. 352).

4.4 Der Streit mit Kronecker

Untersuchungen zu den reellen Zahlen, wie sie Weierstrass, Heine und Cantor betrieben, weckten das Misstrauen Kroneckers, dessen Ziel die Arithmetisierung⁴² der gesamten Mathematik war. Insbesondere wollte er „die Hinzunahme der irrationalen sowie kontinuierlichen Grössen wieder abstreifen. . .“⁴³. Nicht-konstruktive Existenzbeweise über den Satz des ausgeschlossenen Dritten, angewendet auf unendliche Mengen, wie Cantor sie bei der Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen führte, lehnte er nicht nur ab; er wollte gar zeigen, „dass die Ergebnisse der modernen Funktionentheorie und Mengenlehre von keiner realen Bedeutung seien“.⁴⁴

Unklar ist, wann der Streit zwischen Cantor und Kronecker offen ausbrach: Folgen Purkert und Ilgauds dem Jahre später von Cantor geäußerten Verdacht über Kroneckers Wirken als Grund für die Verzögerungen bei der Publikation des „Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“⁴⁵ im Jahre 1877, sieht Ferreirós keine direkte Konfrontation zwischen den beiden bis in die 80er Jahre hinein.⁴⁶

Im Ton eher noch um Versöhnung bemüht, geht Cantor in §4 der „Grundlagen“ auf die unterschiedliche Position zwischen ihm und seinem ehemaligen Lehrer ein:

„Im Gegensatz zu den erwähnten Versuchen über das Unendlichkleine und zu der Verwechslung der beiden Erscheinungsformen des Unendlichen findet sich eine Ansicht über das Wesen und die Bedeutung von Zahlgrößen vielfach vertreten, nach welcher keine anderen Zahlen als wirklich existierend aufgefasst werden als die *endlichen realen ganzen* Zahlen unsrer Zahlenklasse (I). [...] Mit dieser Auffassung der reinen Mathematik, obgleich ich ihr hier nicht zustimmen kann, sind unstreitig gewisse Vorzüge verbunden, die ich hier hervorheben möchte; spricht doch für ihre Bedeutung auch der Umstand, dass zu ihren Vertretern ein Teil der verdienstvollsten Mathematiker der Gegenwart gehört.“⁴⁷

Ohne ein Blatt vor den Mund zu nehmen, kommentierte Cantor zum Jahresanfang 1884 gegenüber Mittag-Leffler seine Bewerbung nach Berlin: „[...] ich habe nicht im Entferntesten daran gedacht, dass ich jetzt schon nach Berlin kommen würde. Da mir aber daran liegt, nach einiger Zeit hinzukommen und mir bekannt ist, dass Schwarz und Kronecker seit Jahren fürchterlich gegen mich intrigieren, aus Furcht, ich könnte einmal hinkommen, so habe ich es für meine Pflicht gehalten,

⁴² Unter Arithmetisierung verstand Kronecker die Rückführung der Mathematik auf die Theorie der ganzen Zahlen und der Polynomringe mit ganzzahligen Koeffizienten im Sinne seines gern zitierten Wahlspruchs „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ (Purkert, Ilgauds, S. 51).

⁴³ Zitiert nach Purkert, Ilgauds, S. 51.

⁴⁴ Purkert, Ilgauds, S. 76f.

⁴⁵ Purkert, Ilgauds, S. 50f.

⁴⁶ Ferreirós, S. 352.

⁴⁷ Cantor 1980, S. 172f.

die Initiative selbst zu ergreifen und mich an den Minister zu wenden. Den nächsten Effekt wusste ich ganz genau voraus, dass nämlich Kr. wie von einem Skorpion gestochen auffahren und mit seinen Hülfsstruppen ein Geheul anstimmen würde, dass Berlin sich in die Sandwüsten Afrika's, mit ihren Löwen, Tigern und Hyänen versetzt glauben wird. Diesen Zweck habe ich, so scheint es, wirklich erreicht.“⁴⁸

Schoenflies vermutet, dass Cantor – auf Anraten seiner Familie oder seines Arztes – die Spannungen mit Kronecker als mögliche Ursache für seine Erkrankung zu überwinden suchte.⁴⁹ Jedenfalls schreibt er am 18. August 1884: „Hochverehrter Professor! Möchten die folgenden Zeilen eine wohlwollende Aufnahme bei Ihnen finden. In Folge einer gewissen Schärfe in der Beurtheilung meiner wissenschaftlichen Arbeiten bin ich, nicht ohne meine eigene Schuld, in einen Gegensatz zu Ihnen hineingeraten, aus dem ich mich aufs tiefste hinaussehne. Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass Sie mir freundlichst Gelegenheit geben werden, eine Verständigung anzubahnen, die zu einer Aussöhnung führen möchte. Es giebt ja nichts Trostloseres, als ein Zwiespalt, zumal ein solcher, der in wissenschaftlichen Gegensätzen seinen letzten Grund hat und zumal in einer Wissenschaft, wie in der Mathematik, wo keine Differenzen herrschen sollten. [...] Dass die Aussöhnung nicht in einem Male geschehen kann, verhehle ich mir nicht; so bitte ich Sie heute nur, mir bei der *allmählichen* Ausgleichung aller Gegensätze gütigst behilflich zu sein, wofür ich Ihnen stets dankbar bleiben werde...“⁵⁰

Kronecker gibt sich in der Antwort erstaunt über Differenzen auf der persönlichen Ebene. „Ein ganz Anderes ist unsere Divergenz in einigen wissenschaftlichen Fragen! Aber ich sehe durchaus keinen Grund, warum unsere persönliche Beziehungen durch diese Divergenz irgend wie gestört sein sollten. Als ich neulich mit Frau v. Kowalevski über derlei Dinge sprach, meinte sie ganz recht, das sei, wie wenn man über Religion spreche. [...] Warum also lassen *Sie* sich, lieber Herr College, durch solche Divergenz in einen Gegensatz gegen mich hineintreiben?“⁵¹

Die persönlichen Differenzen scheinen nach einem Treffen in Berlin im Oktober 1884 einigermaßen überwunden zu sein; auf fachlicher Ebene bleiben die Fronten starr und Cantor wähnt sich bis zu Kroneckers Tod immer wieder als Opfer dessen „Intriguen“.⁵²

⁴⁸ Schoenflies, S. 3f.

⁴⁹ ebda, S. 8.

⁵⁰ ebda, S. 10.

⁵¹ Cantor, Georg: Briefe. Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson. Berlin 1991. Hier S. 196.

⁵² Schoenflies, S. 13.

4.5 Das Kontinuum

§10 der Grundlagen untersucht das geometrische Konzept des ‚Kontinuums‘ und seinen Bezug zur Arithmetik. Nach mehr philosophischen Bemerkungen – etwa über unterschiedliche Auffassungen zu dessen Teilbarkeit, wie sie sich beispielhaft zwischen Aristoteles und Epikur zeigen – kommt Cantor zu einer mathematischen Charakterisierung: „ich glaube aber nun auch in diesen *beiden* Prädikaten ‚perfekt‘ und ‚zusammenhängend‘ die notwendigen und *hinreichenden* Merkmale eines Punktkontinuums zu erkennen und definiere daher ein Punktkontinuum innerhalb G_n [der n -dimensionale *arithmetische* Raum der Wertsystem $(x_1|x_2|\dots|x_n)$] als eine *perfekt-zusammenhängende Menge*. Hier sind ‚perfekt‘ und ‚zusammenhängend‘⁵³ nicht blosse Worte, sondern durch die vorangegangenen Definitionen aufs schärfste begrifflich charakterisierte ganz allgemeine Prädikate des *Kontinuums*.“⁵⁴

Kurz davor erwähnt Cantor seine *Kontinuums-Hypothese*⁵⁵: „Es reduziert sich daher [nach den unter Abschnitt 4.3 angegebenen Ausführungen] die Untersuchung und Feststellung der Mächtigkeit von G_n auf dieselbe Frage, spezialisiert auf das Intervall $(0 \dots 1)$, und ich hoffe, sie schon bald durch einen strengen Beweis dahin beantworten zu können, dass die gesuchte Mächtigkeit keine andere ist als diejenige unserer *zweiten Zahlenklasse* (II). Hieraus wird folgen, dass sämtliche Punktmengen P entweder die Mächtigkeit der ersten Zahlenklasse (I) oder die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) haben.“⁵⁶

Diese Ankündigung blieb Ankündigung: Am 14.11.1884 schrieb Cantor an Mittag-Leffler: „Sie wissen, dass ich oft im Besitze eines strengen Beweises dafür zu sein glaubte, dass das Linearcontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse besitze; immer wieder befanden sich Lücken in meinen Beweisen und stets strengte ich von neuem meine Kräfte in derselben Richtung an, und wenn ich dann wieder glaubte am heissersehnten Ziele angelangt zu sein, so prallte ich plötzlich zurück, weil ich in einer versteckten Ecke einen Fehlschluss wahrnahm.“⁵⁷

Aus heutiger Perspektive wissen wir, wieso Cantors Beweisversuche scheitern mussten: Kurt Gödel zeigte 1938, dass die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom in der Zermelo-Fraenkelschen Axiomatisierung (*ZF*) der Mengenlehre nicht widerlegbar sind, falls *ZF* wider-

⁵³ Eine Punktmenge S heisst *perfekt*, falls $S=S^{(1)}$, also jeder Punkt von S ein Häufungspunkt von S ist. Cantor nennt eine Menge T *zusammenhängend*, falls zu zwei Punkten t, t' und für jedes ε eine endliche Zahl von Punkten t_i in T existieren, die t und t' verbinden, so dass die Länge $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$ ist.

⁵⁴ Cantor 1980, S. 194.

⁵⁵ Erstmals geäußert wurde sie im oben erwähnten „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, Cantor 1980, S. 132.

⁵⁶ Cantor 1980, S. 192f.

⁵⁷ Zitiert nach Purkert, Ilgands, S. 81.

spruchsfrei ist. 1963 zeigte Paul Cohen gar, dass die Kontinuumshypothese in *ZFC* (*ZF* mit Auswahlaxiom) nicht entscheidbar ist, dass sich die Mengenlehre an dieser Stelle – ähnlich zur Geometrie beim Parallelenpostulat – nach einer freien Wahl zwischen den Axiomen in gleichberechtigte Teilgebiete aufspaltet.⁵⁸

4.6 Transfinite Ordinalzahlen

Im zweiten Teil der Arbeit „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ setzt Cantor für die unter allen höheren Ableitungen nicht wegfallenden Punkte einer Menge P

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{n>0} P^{(n)}$$

(später schrieb er w anstelle von ∞)⁵⁹. Wiederholtes Ableiten dieser Menge führt zu Mengen $P^{(w+n)}$ und wiederum mittels Übergang zum Durchschnitt auf $P^{(2w)}$. Allgemein entstehen Mengen der Form

$$P^{(n_0 w^n + n_1 w^{n-1} + \dots + n_n)}$$

wobei n_0, \dots, n_n positive ganze Zahlen sind. Handelt es sich hier erstmals um eine reine Schreibweise, so erkannte Cantor dahinter fundamentale Prinzipien, die ihm die in §11 geführte Einführung des realen Zahlenbegriffes „über das Unendliche hinaus“⁶⁰ erlaubten:

- Das *erste Erzeugungsprinzip* bezeichnet den Übergang von n nach $n+1$ durch Hinzufügen einer Einheit. Dieses Prinzip, ausgehend von der 1, liefert die ganzen Zahlen, die Cantor die Klasse (I) nennt.
- Das *zweite Erzeugungsprinzip* verallgemeinert die Durchschnittsbildung der abgeleiteten Punktmengen: „[Ich] definiere dasselbe näher dahin, dass, wenn irgendeine Sukzession definierter ganzer Zahlen vorliegt, von denen keine grösste existiert, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprinzip eine neue Zahl geschaffen wird, welche als *Grenze* jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächst grössere Zahl definiert wird.“⁶¹
- Zuletzt kommt noch ein *Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip* dazu, welches bewirkt, dass die durch das zweite Prinzip neu gewonnene Zahlenklasse die nächst höhere Mächtigkeit nach der Klasse (I), also die Klasse (II), erhält.

Über die *Wohlordnung* führt Cantor arithmetische Operationen auf unendlichen Mengen ein: „Unter einer *wohlgeordneten* Menge ist jede wohldefinierte Menge zu verstehen, bei welcher die Elemente durch eine bestimmte vorgegebene Sukzession miteinander verbunden sind, welcher gemäss

⁵⁸ Purkert, Ilgauds, S. 178.

⁵⁹ Cantor 1980, S. 147.

⁶⁰ ebda, S. 165.

⁶¹ ebda, S. 196.

es ein *erstes* Element der Menge gibt und sowohl auf jedes einzelne Element (falls es nicht das letzte in der Sukzession ist) ein bestimmtes anderes folgt, wie auch zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen *nächstfolgende* Element in der Sukzession ist ([...]).⁶²

Zwei wohlgeordnete Mengen werden als von gleicher *Anzahl* definiert, falls zwischen ihnen eine mit der Sukzession verträgliche Bijektion existiert.

„Der wesentliche Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Mengen zeigt sich nun darin, dass eine endliche Menge in *jeder* Sukzession, welche man ihren Elementen geben kann, *dieselbe* Anzahl von Elementen darbietet; dagegen werden einer aus unendlich vielen Elementen bestehenden Menge im allgemeinen *verschiedene* Anzahlen zukommen, je nach der Sukzession, welche man den Elementen gibt. Die *Mächtigkeit* einer Menge ist, wie wir gesehen haben ein von der Anordnung unabhängiges Attribut derselben [Kardinalzahlen], die *Anzahl* der Menge weist sich aber als ein von einer gegebenen Sukzession der Elemente im allgemeinen abhängiger Faktor aus, sobald man es mit unendlichen Mengen zu tun hat [Ordinalzahlen].“⁶³

Die Addition zweier Ordinalzahlen, endlich oder nicht, wird als Vereinigung zweier Mengen der entsprechenden Anzahl eingeführt. Diese ist assoziativ, für unendliche Mengen aber nicht mehr kommutativ.

Gleich zu Anfang der „Grundlagen“ schreibt Cantor: „Die bisherigen Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird [, ...].“ Ein Beispiel liefert der folgende Satz, der die unterschiedlichen Konzepte ‚Ableitung von Punktmen- gen‘ und ‚Mächtigkeit‘ verbindet: „Ist P eine Punktmenge, deren Ableitung $P^{(a)}$ identisch verschwindet, wo a eine beliebige ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenklasse ist, so ist die erste Ableitung $P^{(1)}$, und daher auch P selbst, eine Punktmenge von der Mächtigkeit *erster* Klasse.“⁶⁴

4.7 Das Eigentlich-Unendliche: Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit

Rechneten Mathematiker – etwa zu Anfangszeiten des Calculus – wiederholt relativ sorglos und vielfach sogar erfolgreich mit dem Symbol für Unendlich herum, änderte dies nichts an der seit Aristoteles vorherrschenden Meinung des „infinitum actu non datur“ – der Nichtexistenz eines aktuellen Unendlich – bis weit ins 19. Jahrhundert hinein. Carl Friedrich Gauss meinte etwa: „[...] so protestire ich [...] gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher

⁶² ebda, S. 168.

⁶³ ebda, S. 168f.

⁶⁴ ebda, S. 171.

in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine *façon de parler*, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.“⁶⁵

Cantor nennt diese Form des Unendlichen das *Uneigentlich-Unendliche* und charakterisiert es durch *variable*, beliebig gross oder klein werdende, aber stets endliche Grössen. Beim ‚unendlich fernen Punkt‘ in der Funktionentheorie und insbesondere bei den Ordinalzahlen, zeigte sich ihm jedoch eine grundsätzlich neue Form der Unendlichkeit: „Wenn das Unendliche in solch einer bestimmten Form auftritt, so nenne ich es *Eigentlich-Unendliches*.“⁶⁶

Der Sprengkraft seiner Ansicht wohl bewusst untersucht Cantor in §4-§8 der „Grundlagen“ die philosophischen und mathematischen Einwände gegen ein aktuales Unendlich und macht sich auf den Weg ⁶⁷ – Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ folgend – „nachzuweisen, wie die von Skeptikern und Peripatetikern *aller Zeiten* im Unendlichen gesuchten Widersprüche gar nicht vorhanden sind, sobald man sich nur die freilich nicht immer ganz leichte Mühe nimmt, die Unendlichkeitsbegriffe allen Ernstes ihrem wahren Inhalte nach in sich aufzunehmen“⁶⁸.

Dahinter steht eine Haltung, die Cantor (im Gegensatz zu Kroneckers Auffassung der *reinen* Mathematik) freie Mathematik nennt. Diese ist in ihrer Entwicklung völlig frei ist, solange ihre Begriffe widerspruchsfrei und „in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.“⁶⁹ Zur Existenz dieser Objekte schreibt Cantor: „Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muss sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden.“

Programmatisch fährt er fort:

„Es ist, wie ich glaube, nicht nötig, in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, dass sie der Willkür einen äusserst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nötige Korrektiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmässig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann wegen mangelnden Erfolgs fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssi-

⁶⁵ Zitiert nach Purkert, Ilgands, S. 47.

⁶⁶ Cantor 1980, S. 166.

⁶⁷ Aus heutiger Sicht erstaunt bloss sein wiederholtes Eintreten *gegen* aktual unendlich-kleine Grössen, scheint doch eine genauere Betrachtung von Ausdrücken der Form $1/\omega$ naheliegend zu sein: „Dagegen müssten alle Versuche, dieses Unendlichkleine gewaltsam zu einem *eigentlichen* Unendlichkleinen zu machen, als zwecklos endlich aufgegeben zu werden.“ (Cantor 1980, S. 172.)

⁶⁸ Cantor 1980, S. 179.

⁶⁹ ebda., S. 182.

ge Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer *Freiheit*.“⁷⁰

5 Schlussbetrachtungen

„In der Geschichte der Wissenschaften ist es gewiss ein seltener Fall, wenn eine ganze wissenschaftliche Disziplin von grundlegender Bedeutung der schöpferischen Tat eines einzelnen zu verdanken ist. Dieser Fall ist verwirklicht in der Schöpfung Georg Cantors, der Mengenlehre, einer neuen mathematischen Disziplin, die während 25 Jahren in einer Reihe von Abhandlungen ein und desselben Forschers in ihren Grundzügen entwickelt, seitdem zum bleibenden Besitze der Wissenschaft geworden ist, so dass alle späteren Forschungen auf diesem Gebiete nur noch als ergänzende Ausführungen seiner grundlegenden Gedanken aufzufassen sind.“⁷¹ Nichts änderte sich an der Wertschätzung Cantors, würde hier auch noch das Mittun Richard Dedekinds erwähnt; viel mehr liegen die auf persönlicher statt sachlicher Ebene geführten Widerstände gegen sein Werk sowie die psychische Krankheit als dunkle Schatten über Cantors Leben.

Um so bemerkenswerter finde ich die doppelte Linie, die von Cantors „Grundlagen“ zur modernen Mathematik führt: Die Mengenlehre bildet das Fundament der kathedralenartig aufgebauten Mathematik, die Bourbaki fünfzig Jahre später zu schreiben begann. Mit seiner freien Mathematik plädierte Cantor für eine Sicht des Fachs, die hundert Jahre später unverändert formuliert werden könnte. Scharfes Denken innerhalb der Mathematik, ein tiefes Nachdenken über die Mathematik, diesem doppelten Anspruch der „Grundlagen“ wurde Cantor auf beeindruckende Weise gerecht. „[...] für *meine* Arbeiten *beanspruche* ich *Parteilichkeit*, aber nicht *Parteilichkeit* für meine vergängliche Person, sondern *Parteilichkeit* für die *Wahrheit*, welche *ewig* ist und mit der souveränsten Verachtung auf die Wühler herabsieht, die sich einzubilden wagen, mit ihrem elenden Geschreibsel gegen sie auf Dauer etwas ausrichten zu können.“⁷²

⁷⁰ ebda, S. 182.

⁷¹ Ernst Zermelo im Vorwort zu Cantor 1980.

⁷² Brief an Mittag-Leffler vom 26.1.1884, zitiert nach Schoenflies, S. 6.

A. Bibliographie

- Cantor, Georg*: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Herausgegeben von Ernst Zermelo. Reprint, ergänzt um eine Bibliographie weiterer Arbeiten des Autors, Berlin 1980.
- Cantor, Georg*: Foundations of a general theory of manifolds: A mathematico-philosophical investigation into the theory of the infinite. In: Ewald, William (Hg.) From Kant to Hilbert: A source book into the foundation of mathematics. Oxford 1996, S. 878-920.
- Cantor, Georg*: Briefe. Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson. Berlin 1991.
- Dauben, Joseph W.*: Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge 1979.
- Dauben, Joseph W.*: The Development of Cantorian Set Theory. In: Grattan-Guinness, Ivor (Hg.), From the Calculus to Set Theory, 1630-1910: An Introductory History. London, 1980, S. 181-219.
- Dedekind, Richard*: Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Robert Fricke et al, 3 Bände, Braunschweig 1932.
- Ferreirós, José*: Cantor and Dedekind. *Historia Mathematica* 20 (1993), S. 343-363.
- Fraenkel, Adolf*: Das Leben Georg Cantors. In: Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Herausgegeben von Ernst Zermelo. Reprint, ergänzt um eine Bibliographie weiterer Arbeiten des Autors, Berlin 1980, S. 452-483.
- Galilei, Galileo*: Two New Sciences, including Centers of Gravity & Force of Percussion. Translated, with Introduction and Notes, by Stillman Drake. Madison, 1974.
- Purkert Walter; Ilgauds, Hans Joachim*: Georg Cantor: 1845-1918. Basel, 1987.
- Schoenflies, Arthur*: Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. *Acta mathematica*, 50 (1927), S. 1-23.
- Spalt, Detlef D.*: Die mathematischen und philosophischen Grundlagen des Weierstrassschen Zahlbegriffes zwischen Bolzano und Cantor. *Archive for History of Exact Sciences* 41(4) (1991), S. 311-362.